Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta del 25 luglio 2016

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: ☐ Canale A-H ☐ Canale I-Z

Motivare le risposte: una risposta giusta priva di motivazione, o con una motivazione errata, riceverà 0 *punti.*

Esercizio	Punti disponibili	Punti ottenuti
1	12.5	
2	10	
3	10	
Totale	32.5	

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Consideriamo uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V, un sottospazio vettoriale $W \subset V$ e una forma bilineare simmetrica g su V. Denotiamo con $W^\perp$ l'ortogonale di W rispetto a g.

(i) Completare la seguente definizione: *"La forma bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ si dice non degenere se..."*

(ii) È vero che, se g è definita positiva, allora la restrizione $g|_W$ di g a W è non degenere?

(iii) È vero che, se g è definita positiva, allora $W^\perp \oplus W = V$?

(iv) È vero che, se g è non degenere, allora $W^\perp \oplus W = V$?

(v) È vero che, se g è non degenere, allora $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$?

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano affine reale con coordinate canoniche (x, y) e siano

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (2,0), \quad P_3 = (1,1)$$
$$Q_1 = (0,0), \quad Q_2 = (1,0), \quad Q_3 = (-2,1)$$

Chiamiamo $T_{\mathcal{P}}$ il triangolo con vertici $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $T_{\mathcal{Q}}$ il triangolo con vertici $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$.

(i) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'affinità. Dimostrare che $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q} \implies f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}}$.

(ii) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'affinità. Dimostrare che $f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}} \implies f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$.

(iii) Dire se esiste un'affinità conforme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}}$.

(iv) Determinare le affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che preservino l'orientazione e tali che $f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}}$.

Risoluzione:

Esercizio 3. Considerare la quadrica Q in $\mathbb{RP}^3$ di equazione $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$ e sia $\mathcal{L}$ la retta proiettiva passante per $P = [2:2:0:2]$ e $P' = [1:1:1:1]$. Denotiamo con H_0 il piano proiettivo $\{X_0 = 0\}$ e con $j_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{RP}^2 \setminus H_0$ l'usuale identificazione $j_0(x_1, x_2) = [1 : x_1 : x_2]$.

(i) Determinare equazioni per ciascuna retta proiettiva contenuta in Q.

(ii) Determinare equazioni $F_{[\lambda:\mu]}$ del fascio $(\Pi_{[\lambda:\mu]})_{[\lambda:\mu]\in\mathbb{RP}^1}$ dei piani proiettivi in $\mathbb{RP}^3$ che contengono $\mathcal{L}$.

(iii) Per ogni $[\lambda : \mu] \in \mathbb{RP}^1$, determinare il tipo di conica proiettiva $\Gamma_{[\lambda:\mu]}$ ottenuta intersecando Q con $\Pi_{[\lambda:\mu]}$.

(iv) Per ogni $[\lambda : \mu] \in \mathbb{RP}^1$, determinare il tipo di conica affine di $C_{[\lambda:\mu]} = j_0^{-1}\left(\Gamma_{[\lambda:\mu]} \setminus H_0\right)$ in $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione: