Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Soluzioni della prova scritta del 25 luglio 2016

Esercizio 1. Consideriamo uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V, un sottospazio vettoriale $W \subset V$ e una forma bilineare simmetrica g su V. Denotiamo con $W^\perp$ l'ortogonale di W rispetto a g.

(i) Completare la seguente definizione: *"La forma bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ si dice non degenere se..."*

SOLUZIONE.

La forma bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ si dice non degenere se, per ogni $0 \neq v \in V$, esiste un $w \in V$ tale che $g(v, w) \neq 0$.

(ii) È vero che, se g è definita positiva, allora la restrizione $g|_W$ di g a W è non degenere?

SOLUZIONE.

Sì.
Dato infatti $0 \neq w \in W$, scelgo $w' := w$ e ottengo $g(w, w') = g(w, w) > 0$, dunque $g(w, w') \neq 0$.

(iii) È vero che, se g è definita positiva, allora $W^\perp \oplus W = V$?

SOLUZIONE.

Sì.
Per dimostrare che $W^\perp \cap W = \{0\}$, notiamo che $w \in W \cap W^\perp$ deve soddisfare $g(w, w) = 0$. Essendo g definito positivo, ne segue che tale $w = 0$.
Il fatto che $W^\perp + W = V$ segue dal fatto che $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ ed è una conseguenza di (v) e del fatto che g definito positivo è non degenere.

(iv) È vero che, se g è non degenere, allora $W^\perp \oplus W = V$?

SOLUZIONE.

No.
Prendiamo $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{e_1, e_2\}$ e sia $W = \mathbb{R}e_1$. Definiamo g in modo che $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 0$ e $g(e_1, e_2) = 1$. Allora $e_1 \in W \cap W^\perp$ e dunque $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.

(v) È vero che, se g è non degenere, allora $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$?

SOLUZIONE.

Sì.
Si ha sempre, per definizione, $W^\perp = \mathrm{Ann}(b(W))$, dove $b : V \to V^*$ è definito come $v \mapsto b_v$ e $b_v(v') = g(v, v')$. Dunque, $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(b(W))$. Quasi per definizione, g è non degenere se e solo se b è iniettiva, ne qual caso $\dim(b(W)) = \dim(W)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano affine reale con coordinate canoniche (x, y) e siano

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (2, 0), \quad P_3 = (1, 1)$$
$$Q_1 = (0, 0), \quad Q_2 = (1, 0), \quad Q_3 = (-2, 1)$$

Chiamiamo $T_{\mathcal{P}}$ il triangolo con vertici $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $T_{\mathcal{Q}}$ il triangolo con vertici $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$.

(i) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'affinità. Dimostrare che $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q} \implies f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}}$.

Soluzione.

Un triangolo è l'inviluppo convesso dei suoi vertici: $T_{\mathcal{P}} = \mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ e $T_{\mathcal{Q}} = \mathrm{Conv}(\mathcal{Q})$.

Poiché le transformazioni affini f soddisfano $f(\mathrm{Conv}(K)) \subseteq \mathrm{Conv}(f(K))$ per ogni K, otteniamo che $f(T_{\mathcal{P}}) \subseteq T_{\mathcal{Q}}$.

Essendo f un'affinità e quindi invertibile, $f^{-1}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P} \implies f^{-1}(T_{\mathcal{Q}}) \subseteq T_{\mathcal{P}}$ e possiamo concludere.

(ii) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'affinità. Dimostrare che $f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}} \implies f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$.

Soluzione.

Sia $T = T_{\mathcal{P}}$ oppure $T = T_{\mathcal{Q}}$. Un punto $X \in T$ è non estremale se esistono $a \in (0, 1)$ e $X_0, X_1 \in T$ distinti tali che $X = aX_0 + (1 - a)X_1$.

Notiamo che i punti di T sono quasi tutti non estremale: le uniche eccezioni sono i vertici di T.

Concludiamo osservando che un'affinità f manda i punti non estremali di $T_{\mathcal{P}}$ biunivocamente nei punti non estremali di $T_{\mathcal{Q}}$.

Infatti, se $X \in T_{\mathcal{P}}$ è non estremale e si scrive come $X = aX_0 + (1 - a)X_1$ con $X_0 \neq X_1$, allora $f(X) = af(X_0) + (1 - a)f(X_1)$ e $f(X_0) \neq f(X_1)$ perché f è iniettiva: dunque $f(X)$ è non estremale. Questo mostra che i punti non estremali di $T_{\mathcal{P}}$ sono mandati in punti non estremali di $T_{\mathcal{Q}}$. Usando l'affinità f^{-1} is ottiene la voluta bigezione.

(iii) Dire se esiste un'affinità conforme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}}$.

Soluzione.

Tale affinità non esiste.
Infatti, il triangolo $T_{\mathcal{Q}}$ ha un angolo ottuso $\widehat{Q_3 Q_1 Q_2}$, mentre il triangolo $T_{\mathcal{P}}$ ha tre angoli acuti.

(iv) Determinare le affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che preservino l'orientazione e tali che $f(T_{\mathcal{P}}) = T_{\mathcal{Q}}$.

Soluzione.

Le uniche affinità che preservano l'orientazione sono: f_1 che manda (P_1, P_2, P_3) in (Q_1, Q_2, Q_3), f_2 che manda (P_1, P_2, P_3) in (Q_2, Q_3, Q_1) e f_3 che manda (P_1, P_2, P_3) in (Q_3, Q_1, Q_2).

Da un calcolo diretto, otteniamo

$$f_1(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$$
$$f_2(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$f_3(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti, se $f_i(X) = M_i X + v_i$, si può verificare che $\det(M_i) > 0$ per $i = 1, 2, 3$.

Esercizio 3. Considerare la quadrica Q in $\mathbb{RP}^3$ di equazione $X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$ e sia $\mathcal{L}$ la retta proiettiva passante per $P=[2:2:0:2]$ e $P'=[1:1:1:1]$. Denotiamo con H_0 il piano proiettivo $\{X_0=0\}$ e con $j_0:\mathbb{R}^2\to\mathbb{RP}^2\setminus H_0$ l'usuale identificazione $j_0(x_1,x_2)=[1:x_1:x_2]$.

(i) Determinare equazioni per ciascuna retta proiettiva contenuta in Q.

SOLUZIONE.

La quadrica è un cono con vertice $P_0=[1:0:0:0]$ *e le rette passano necessariamente dal vertice* P_0.

Dunque abbiamo una retta $\mathcal{R}_{[Y_1:Y_2:Y_3]}$ *per ciascuna tripla* $[Y_1:Y_2:Y_3]\in\mathbb{RP}^2$ *tale che* $Y_1^2+Y_2^2-Y_3^2=0$. *Equazioni per la retta* $\mathcal{R}_{[Y_1:Y_2:Y_3]}$ *sono per esempio*

$$\mathcal{R}_{[Y_1:Y_2:Y_3]}=\{[X_0:X_1:X_2:X_3]\in\mathbb{RP}^3\,|\,X_1=Y_1,\ X_2=Y_2\}.$$

(ii) Determinare equazioni $F_{[\lambda:\mu]}$ del fascio $(\Pi_{[\lambda:\mu]})_{[\lambda:\mu]\in\mathbb{RP}^1}$ dei piani proiettivi in $\mathbb{RP}^3$ che contengono $\mathcal{L}$.

SOLUZIONE.

Due esempi di piani per P,P', *e dunque contenenti* $\mathcal{L}$, *sono* $\{X_0-X_1=0\}$ *e* $\{X_1-X_3=0\}$.

Dunque il fascio di piani Π *si può scrivere come*

$$\Pi_{[\lambda:\mu]}=\{\lambda(X_0-X_1)+\mu(X_1-X_3)=0\}.$$

(iii) Per ogni $[\lambda:\mu]\in\mathbb{RP}^1$, determinare il tipo di conica proiettiva $\Gamma_{[\lambda:\mu]}$ ottenuta intersecando Q con $\Pi_{[\lambda:\mu]}$.

SOLUZIONE.

Sia $\lambda\neq 0$. *Allora l'intersezione* $\Gamma_{[\lambda:\mu]}$ *ha equazioni*

$$\begin{cases} X_0=X_1+\frac{\mu}{\lambda}(X_1-X_3)\\ X_1^2+X_2^2-X_3^2=0\end{cases}$$

Chiamiamo $g(Y_1,Y_2,Y_3)=Y_1+\frac{\mu}{\lambda}(Y_1-Y_3)$.

Dunque possiamo prendere il riferimento $Q_1=[g(1,0,0):1:0:0]$, $Q_2=[g(0,1,0):0:1:0]$, $Q_3=[g(0,0,1):0:0:1]$, $U=[g(1,0,0)+g(0,1,0)+g(0,0,1):1:1:1]$ *su* $\Pi_{[\lambda:\mu]}$ *con coordinate omogenee* $[Y_1:Y_2:Y_3]$. *In tale riferimento,* $\Gamma_{[\lambda:\mu]}$ *ha equazione* $Y_1^2+Y_2^2-Y_3^2=0$, *e dunque è una ellisse reale.*

Sia $\lambda=0$. *Allora* $\Gamma_{[0:1]}$ *ha equazioni*

$$\begin{cases} X_1=X_3\\ X_2^2=0\end{cases}$$

e dunque è una retta doppia.

(iv) Per ogni $[\lambda:\mu]\in\mathbb{RP}^1$, determinare il tipo di conica affine di $C_{[\lambda:\mu]}=j_0^{-1}\left(\Gamma_{[\lambda:\mu]}\setminus H_0\right)$ in $\mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE.

Per $\lambda=0$, *chiaramente* $\gamma_{[0:1]}$ *è una retta doppia. Per* $\mu=0$, $\Gamma_{[1:0]}\cap H_0$ *consta dei punti* $[0:0:1:1]$ *e* $[0:0:1:-1]$ *e dunque* $\gamma_{[1:0]}$ *è una iperbole.*

Per $\mu, \lambda \neq 0$, poniamo $t = \lambda/\mu$ e notiamo che l'intersezione di $\Gamma_{[t:1]}$ con H_0 ha equazioni

$$\begin{cases} X_3 = (1-t)X_1 \\ X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} X_3 = (1-t)X_1 \\ t(2-t)X_1^2 + X_2^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$|\Gamma_{[t:1]} \cap H_0| = \begin{cases} 0 & \textit{per } t \in (0,2) \\ 1 & \textit{per } t = 2 \\ 2 & \textit{per } t < 0 \textit{ e per } t > 2 \end{cases}$$

Concludiamo che la conica affine reale $\gamma_{[t:1]}$ è una

$$\begin{cases} \textit{retta doppia} & \textit{per } t = 0 \\ \textit{ellisse reale} & \textit{per } t \in (0,2) \\ \textit{parabola} & \textit{per } t = 2 \\ \textit{iperbole} & \textit{per } t < 0 \textit{ e per } t > 2 \textit{ (e per } t = \infty\textit{).} \end{cases}$$