Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta del 2 marzo 2016

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo numerico munito delle coordinate canoniche (x, y).
Si consideri il triangolo T con vertici $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (a, 0)$, $P_3 = (u, v)$ in $\mathbb{E}^2$ e sia e_i il lato di T opposto a P_i.

(i) Per ogni $i = 1, 2, 3$, determinare l'equazione cartesiana della retta L_i passante per P_i e ortogonale a e_i.

Soluzione
Chiaramente $\overrightarrow{P_1P_2} = (a, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (u, v)$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3} = (u - a, v)$. *Dunque, le rette* L_i *hanno equazioni* $L_1 = \{(u-a)x + vy = c_1\}$, $L_2 = \{ux + vy = c_2\}$ *e* $L_3 = \{ax = c_3\}$ *per opportune costanti* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. *I valori di* c_1, c_2, c_3 *si trovano imponendo* $P_i \in L_i$*: otteniamo così*

$$L_1 = \{(u - a)x + vy = 0\}, \quad L_2 = \{ux + vy = ua\}, \quad L_3 = \{x = u\}$$

(ii) Dimostrare che $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ consiste di un unico punto R (*ortocentro*) e determinarlo.

Soluzione
L'intersezione $L_1 \cap L_3$ *è data dal punto* $R = (u, (a - u)u/v)$. *Sostituendo nell'equazione di* L_2, *si ottiene che* $R \in L_2$.

(iii) Dimostrare che le tre mediane di T si incontrano in un punto G (*baricentro*) e determinarlo.

Soluzione
Siano $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. *La mediana* M_i *uscente da* P_i *è data da* $M_i = \{t_iP_i + \frac{1-t_i}{2}(P_j + P_k) \,|\, t_i \in [0, 1]\}$. *Dunque un punto che si scriva come combinazione convessa* $a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3$ *appartiene a* M_i *se e solo se* $a_j = a_k$. *Dunque* $M_i \cap M_j$ *è dato da una combinazione convessa tale che* $a_j = a_k$ *e* $a_i = a_k$, *ossia* $\frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$. *Ne segue che tale punto appartiene anche a* M_k *e dunque*

$$G = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3) = \frac{1}{3}(a + u, v)$$

(iv) Determinare i triangoli T per i quali il punto R coincida con il punto G.

Soluzione
Imponiamo $R = G$ *e otteniamo* $a = 2u$ *e* $v^2 = 3u^2$, *da cui* $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = |a|$. *Dunque i triangoli* T *per i quali* $R = G$ *sono i triangoli equilateri.*

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo numerico.
Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione affine $S_a : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita come

$$S_a(X) = M_a X + v, \qquad \text{dove} \quad M_a = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare per quali valori di a l'applicazione S_a sia un'affinità e, per tali valori, determinare la sua inversa.

Soluzione
L'applicazione affine S_a è un'affinità se e solo se è invertibile, ossia se e solo se M_a è invertibile. Questo accade se e solo se $\det(M_a) \neq 0$. *Calcoliamo*

$$\det(M_a) = \frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(2a-1)$$

e dunque S_a è un'affinità se e solo se $a \neq \frac{1}{2}$.
D'altra parte, se S_a è invertibile e chiamiamo $Y = S_a(X)$, otteniamo $Y = M_a(S_a^{-1}(Y)) + v$, ossia $S_a^{-1}(Y) = M_a^{-1}Y - M_a^{-1}v$ dove

$$M_a^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{2a-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \qquad e \qquad -M_a^{-1}v = \frac{\sqrt{5}}{2a-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che

$$S_a^{-1}(Y) = \frac{\sqrt{5}}{2a-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} Y + \frac{\sqrt{5}}{2a-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Per ogni valore di a verificare se l'applicazione S_a abbia punti fissi.

Soluzione
Un punto fisso X soddisfa $S_a(X) = X$, ossia $(M_a - I)(X) = -v$. Dunque S_a ha punti fissi se e solo se $-v$ è nell'immagine dell'applicazione lineare $M_a - I$. Calcoliamo

$$M_a - I = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} a - \sqrt{5} & 1 \\ 1 & 2 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

e dunque $\det(M_a - I) = (a - \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) - 1 = (2 - \sqrt{5})(a+2)$. *Ne segue che $M_a - I$ ha rango* 2 *per $a \neq -2$.*
Invece, per $a = -2$ l'applicazione $M_a - I$ ha rango 1 *e la sua immagine è* $\mathbb{R}(1,2)$, *e dunque non contiene $-v$.*

Quindi, per $a \neq -2$ l'applicazione S_a ha un unico punto fisso; per $a = -2$ l'applicazione S_a non ha punti fissi.

(iii) Enunciare il teorema di classificazione delle isometrie affini di $\mathbb{E}^2$.

Soluzione
Le isometrie affini F di $\mathbb{E}^2$ sono di cinque tipi:

(0) l'identità (fissa tutti i punti);

(1) le rotazioni (fissano un punto e hanno $\det = 1$*);*

(2) le traslazioni (non fissano alcun punto e hanno $\det = 1$*);*

(3) le riflessioni rispetto ad una retta affine (fissano una retta affine e hanno $\det = -1$*);*

(4) le glissoriflessioni rispetto ad una retta affine (non fissano alcun punto e hanno $\det = -1$*).*

(iv) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione S_a sia una isometria.
Per tali valori del parametro a dire di che tipo di isometria si tratti.

SOLUZIONE

L'applicazione affine S_a è una isometria se e solo se preserva le distanze fra coppie di punti, e questo accade se e solo se la trasformazione M_a è ortogonale, ossia $M_a^T M_a = I$. Calcoliamo

$$M_a^T M_a = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a^2+1 & a+2 \\ a+2 & 5 \end{pmatrix}$$

e $M_a^T M_a = I \iff a = -2$.

Per $a = -2$, abbiamo $\det(M_{-2}) = -1$ e, per il punto (ii), l'isometria S_{-2} non ha punti fissi e dunque è una glissoriflessione.

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio affine $\mathbb{R}^2$ come incluso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tramite l'applicazione $j_0 : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da $j_0(x, y) = [1 : x : y]$, e con retta all'infinito $H_0 = \{X_0 = 0\}$.

(i-ii) Scrivere la lista delle equazioni delle coniche reali affini in forma canonica (*classificazione a meno di affinità*). Accanto a ciascuna conica affine C_i al punto (i), determinarne i punti all'infinito rispetto all'inclusione j_0. Per ciascuno di tali punti, esibire una successione in C_i che converga verso di esso.

Soluzione

Nome	*Equazione*	*Punti impropri*	*Successione*
Ellisse reale	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	$\emptyset$	
Ellisse immaginaria	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$	
Iperbole	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	$P^\pm = [0 : 1 : \pm 1]$	$q_n^\pm = (\sqrt{n^2+1}, \pm n) \to P^\pm$
Parabola	$x^2 - y = 0$	$P = [0 : 0 : 1]$	$q_n = (n, n^2) \to P$
Rette reali incidenti	$x^2 - y^2 = 0$	$P^\pm = [0 : 1 : \pm 1]$	$q_n^\pm = (n, \pm n) \to P^\pm$
Rette immaginarie incidenti	$x^2 + y^2 = 0$	$\emptyset$	
Rette reali parallele	$x^2 - 1 = 0$	$P = [0 : 0 : 1]$	$q_n = (1, n) \to P$
Rette immaginarie parallele	$x^2 + 1 = 0$	$\emptyset$	
Retta doppia	$x^2 = 0$	$P = [0 : 0 : 1]$	$q_n = (0, n) \to P$

(iii) Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la conica affine reale di equazione $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5y - 2 = 0$ e sia $\widehat{C}$ la sua chiusura proiettiva (rispetto all'inclusione j_0). Trovare i punti all'infinito di C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e determinare che tipo di conica affine sia.

Soluzione
La matrice associata alla conica $C = \{f = 0\}$ *con* $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5y - 2$ *è*

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} c & v^T \\ \hline v & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ \hline 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{array}\right)$$

Notiamo che $\det(A) = -\frac{25}{4} < 0$ *e* $\det(Q) = 0$. *Dunque* A *e* Q *hanno rango* 2 *e* A *ha segnatura nulla. Ne segue che* C *consiste di due rette reali incidenti.*

In tal caso, la sua chiusura topologica $\overline{C}$ *coincide con la sua chiusura proiettiva* $\widehat{C}$.

L'equazione di $\widehat{C}$ *è* $F(X_0, X_1, X_2) = 2X_1^2 - 2X_2^2 + 3X_1X_2 + 5X_0X_2 - 2X_0^2 = 0$, *ottenuta omogeneizzando l'equazione di* C. *I punti all'infinito sono dati da* $\widehat{C} \cap H_0 = \{F = X_0 = 0\}$. *Risolvendo il sistema*

$$\begin{cases} 2X_1^2 - 2X_2^2 + 3X_1X_2 + 5X_0X_2 - 2X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

troviamo i punti all'infinito $[0 : 1 : 2]$ *e* $[0 : -2 : 1]$.

(iv) Si consideri ora la retta proiettiva $H_k = \{X_k = 0\}$. Per quali $k = 0, 1, 2$ la conica affine $\widehat{C} \setminus H_k$ è una parabola?

Soluzione
Poiché $\widehat{C}$ *consiste di due rette reali incidenti, non è possibile che* $\widehat{C} \setminus L$ *sia una parabola per alcuna retta proiettiva* L, *e dunque nemmeno per* $L = H_k$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{R}^2$ come incluso in modo standard tramite $j_0 : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da $j_0(x, y) = [1 : x : y]$. Sia $\ell \subset \mathbb{R}^2$ la retta affine di equazione $2x - y + 1 = 0$ e sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la conica affine di equazione $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5y - 2 = 0$. Definiamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \ell \to \mathbb{R}^2$ tramite

$$f(x, y) := \frac{1}{2x - y + 1}(x, y)$$

(ii) Determinare le equazioni, nelle coordinate proiettive omogenee canoniche $[X_0 : X_1 : X_2]$, delle chiusure proiettive $\widehat{\ell}$ e $\widehat{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di ℓ e C.

Soluzione
Omogeneizzando, otteniamo $\widehat{C} = \{2X_1^2 - 2X_2^2 + 3X_1X_2 + 5X_0X_2 - 2X_0^2 = 0\}$ *e* $\widehat{\ell} = \{2X_1 - X_2 + X_0 = 0\}$.

(iii) Determinare la proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che estende f, e una matrice che la rappresenta nelle coordinate $[X_0 : X_1 : X_2]$.

Soluzione
La F cercata deve soddisfare $F \circ j_0 = j_0 \circ f$ e dunque $F|_{U_0 \setminus \ell} = j_0 \circ f \circ j_0^{-1}$, ossia

$$\begin{aligned} F[X_0 : X_1 : X_2] &= (j_0 \circ f \circ j_0^{-1})[X_0 : X_1 : X_2] = (j_0 \circ f)\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right) = \\ &= j_0\left(\frac{1}{2X_1/X_0 - X_2/X_0 + 1}\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right)\right) = \left[1 : \frac{X_1}{2X_1 - X_2 + X_0}, \frac{X_2}{2X_1 - X_2 + X_0}\right] = \\ &= [2X_1 - X_2 + X_0 : X_1 : X_2] \end{aligned}$$

per ogni $[X_0 : X_1 : X_2] \in U_0 \setminus \ell$.

Dunque la proiettività F cercata è definita dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(che è invertibile, in quanto $\det(M) = 1$*) a meno di multipli.*

Notiamo che tale F è unica. Infatti, è sufficiente prendere un riferimento proiettivo $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ per $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con $P_i \in U_0 \setminus \ell$. Data un'altra proiettività F' che estenda f, avremmo che $F|_{U_0\setminus\ell} \equiv F'|_{U_0\setminus\ell}$; in particolare, F e F' coinciderebbero sul riferimento $\mathcal{P}$ e dunque $F \equiv F'$.

(iv) Determinare le equazioni di $F(\widehat{\ell})$ e di $F(\widehat{C})$ nelle coordinate $[X_0 : X_1 : X_2]$.

Soluzione
Iniziamo notando che, essendo F una proiettività, $F(\widehat{\ell})$ è una retta proiettiva e $F(\widehat{C})$ è una conica proiettiva.

La retta $\widehat{\ell}$ corrisponde ad un sottospazio vettoriale $\widetilde{\ell} \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 e di equazione $L(X_0, X_1, X_2) = X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$. La conica $\widehat{C}$ corrisponde ad un cono $\widetilde{C} \subset \mathbb{R}^3$ di equazione $G(X_0, X_1, X_2) = -2X_0^2 + 2X_1^2 - 2X_2^2 + 5X_0X_2 + 3X_1X_2 = 0$.

Come è chiaro dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "M"] \arrow[d, "L"'] & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

poiché $\widetilde{\ell} = \{L = 0\}$, l'immagine $M(\widetilde{\ell})$ ha equazione $L \circ M^{-1} = 0$. In modo analogo, $M(\widetilde{C}) = \{G \circ M^{-1} = 0\}$.

Dall'espressione esplicita di F, notiamo che $F(\widehat{\ell})$ è la retta $H_0 = \{X_0 = 0\}$.

Per determinare $M(\widetilde{C})$, calcoliamo

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque la matrice associata alla conica $M(\widetilde{C})$ è

$$(M^{-1})^T Q M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ 4 & -6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque $M(\widetilde{C}) = \{-2X_0^2 - 6X_1^2 + X_2^2 + 8X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2 = 0\}$.

Concludiamo che $F(C) = \left\{[X_0 : X_1 : X_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid -2X_0^2 - 6X_1^2 + X_2^2 + 8X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2 = 0\right\}$.

(i) Determinare l'immagine di f.

Soluzione

L'immagine di f è data da $\mathbb{R}^2 \setminus j_0^{-1}(F(H_0))$. L'equazione di $F(H_0)$ è data dalla prima riga di M^{-1}, ossia $F(H_0) = \{-4X_0 + 8X_1 + X_2 = 0\}$, e dunque $j_0^{-1}(F(H_0))$ è la retta affine di $\mathbb{R}^2$ di equazione $8x + y - 4 = 0$.

Concludiamo che l'immagine di f è $\mathbb{R}^2 \setminus \{8x + y - 4 = 0\}$.