Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta del 2 marzo 2016

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Canale: ☐ Canale A-H ☐ Canale I-Z

INTENDO AFFRONTARE : *(mettere una sola crocetta)*

☐ LA PROVA SCRITTA COMPLETA IN TRE ORE DI TEMPO *(e rinuncio ad avvalermi dell'eventuale prova in itinere)*

☐ SOLO GLI ESERCIZI 3 E 4 IN DUE ORE DI TEMPO *(e mi avvalgo della prova in itinere o degli esercizi 1-2 risolti il 10/2/2016)*

Si ricorda che la prova scritta è utilizzabile **solo nel corso di questa sessione**.

Motivare le risposte: una risposta giusta priva di motivazione, o con una motivazione errata, riceverà 0 *punti.*

Esercizio	Punti disponibili	Punti ottenuti
1	16	
2	16	
3	16	
4	16	
Totale	32	

(Nel caso si sostenga la prova completa, il punteggio totale è dato dalla somma dei punteggi agli esercizi, diviso per due.)

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo numerico munito delle coordinate canoniche (x, y).
Si consideri il triangolo T con vertici $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (a, 0)$, $P_3 = (u, v)$ in $\mathbb{E}^2$ e sia e_i il lato di T opposto a P_i.

(i) Per ogni $i = 1, 2, 3$, determinare l'equazione cartesiana della retta L_i passante per P_i e ortogonale a e_i.

(ii) Dimostrare che $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ consiste di un unico punto R (*ortocentro*) e determinarlo.

(iii) Dimostrare che le tre mediane di T si incontrano in un punto G (*baricentro*) e determinarlo.

(iv) Determinare i triangoli T per i quali il punto R coincida con il punto G.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo numerico.
Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione affine $S_a : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita come

$$S_a(X) = M_a X + v, \qquad \text{dove} \quad M_a = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare per quali valori di a l'applicazione S_a sia un'affinità e, per tali valori, determinare la sua inversa.

(ii) Per ogni valore di a verificare se l'applicazione S_a abbia punti fissi.

(iii) Enunciare il teorema di classificazione delle isometrie affini di $\mathbb{E}^2$.

(iv) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione S_a sia una isometria.
Per tali valori del parametro a dire di che tipo di isometria si tratti.

Risoluzione:

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio affine $\mathbb{R}^2$ come incluso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tramite l'applicazione $j_0 : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da $j_0(x, y) = [1 : x : y]$, e con retta all'infinito $H_0 = \{X_0 = 0\}$.

(i) Scrivere la lista delle equazioni delle coniche reali affini in forma canonica (*classificazione a meno di affinità*).

(ii) Accanto a ciascuna conica affine C_i al punto (i), determinarne i punti all'infinito rispetto all'inclusione j_0. Per ciascuno di tali punti, esibire una successione in C_i che converga verso di esso.

(iii) Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la conica affine reale di equazione $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5y - 2 = 0$ e sia $\widehat{C}$ la sua chiusura proiettiva (rispetto all'inclusione j_0). Trovare i punti all'infinito di C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e determinare che tipo di conica affine sia.

(iv) Si consideri ora la retta proiettiva $H_k = \{X_k = 0\}$. Per quali $k = 0, 1, 2$ la conica affine $\widehat{C} \setminus H_k$ è una parabola?

Risoluzione:

Esercizio 4. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{R}^2$ come incluso in modo standard tramite $j_0 : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da $j_0(x, y) = [1 : x : y]$. Sia $\ell \subset \mathbb{R}^2$ la retta affine di equazione $2x - y + 1 = 0$ e sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la conica affine di equazione $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5y - 2 = 0$. Definiamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \ell \to \mathbb{R}^2$ tramite

$$f(x, y) := \frac{1}{2x - y + 1}(x, y)$$

(i) Determinare l'immagine di f.

(ii) Determinare le equazioni, nelle coordinate proiettive omogenee canoniche $[X_0 : X_1 : X_2]$, delle chiusure proiettive $\widehat{\ell}$ e $\widehat{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di ℓ e C.

(iii) Determinare la proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che estende f, e una matrice che la rappresenta nelle coordinate $[X_0 : X_1 : X_2]$.

(iv) Determinare le equazioni di $F(\widehat{\ell})$ e di $F(\widehat{C})$ nelle coordinate $[X_0 : X_1 : X_2]$.

Risoluzione: