Geometria I

Prova scritta del 19 settembre 2016

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Canale: ☐ Canale A-H ☐ Canale I-Z

Motivare le risposte: una risposta giusta priva di motivazione, o con una motivazione errata, riceverà 0 *punti.*

Esercizio	Punti disponibili	Punti ottenuti
1	12	
2	12	
3	10	
Totale	34	

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Consideriamo una forma bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita, una sua base $\mathcal{B}$ e la matrice $G = [g]_{\mathcal{B}}$ che rappresenta g rispetto a tale base.

(i) Enunciare il teorema di Sylvester e la definizione intrinseca di indici di positività n_+, negatività n_- e nullità n_0 di g.

(ii) Dimostrare che n_+, n_- e n_0 coincidono con il numero di autovalori rispettivamente positivi, negativi e nulli della matrice G.

(iii) Completare la seguente definizione: *"La forma bilineare simmetrica g si dice non degenere se . . . "*

Sia ora $W \subset V$ un sottospazio vettoriale:

(iv) è vero che, se g è degenere, allora la restrizione $g|_W$ di g a W è degenere?
Ed è vero che, se g è non degenere, allora la restrizione $g|_W$ di g a W è non degenere?

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^4$ lo spazio euclideo numerico quadridimensionale con *coordinate canoniche* (x_1, x_2, x_3, x_4).
Si consideri il piano Π in $\mathbb{E}^4$ generato dai vettori $b_1 = (0, 1, 1, 0)$ e $b_2 = (0, 0, -1, 1)$.
Sia $p : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ la proiezione ortogonale su Π e sia $q : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ la riflessione ortogonale rispetto a Π.

(i) Determinare una base ortonormale ed equazioni cartesiane per Π.

(ii) Determinare le matrici P e Q che rappresentano rispettivamente p e q rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{E}^4$. Calcolare esplicitamente $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

(iii) Le applicazioni p, q sono isometrie di $\mathbb{E}^4$?

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia data la famiglia di coniche γ_s nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di equazioni:

$$\gamma_s : \; x^2 + sy^2 + 2(1-s)x - 2sy + s + 1 = 0$$

rispetto alle coordinate canoniche (x, y) di $\mathbb{E}^2$. Determinare i valori del parametro $s \in \mathbb{R}$ per cui:

(i) γ_s non ha punti reali;

(ii) il supporto di γ_s è un punto;

(iii) il supporto di γ_s è una retta;

(iv) γ_s è una parabola;

(v) γ_s è un'iperbole;

(vi) γ_s è un'ellisse (non degenere) con punti reali;

(vii) γ_s è una circonferenza con punti reali (e raggio positivo).

[Suggerimento: può essere utile scriversi, prima, la lista delle coniche euclidee in forma canonica, distinguendole in degeneri e non degeneri, con a lato i rispettivi invarianti.]

Risoluzione: