Geometria I

Soluzioni della prova scritta del 19 settembre 2016

Esercizio 1. Consideriamo una forma bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita, una sua base $\mathcal{B}$ e la matrice $G = [g]_{\mathcal{B}}$ che rappresenta g rispetto a tale base.

(i) Enunciare il teorema di Sylvester e la definizione intrinseca di indici di positività n_+, negatività n_- e nullità n_0 di g.

Soluzione proposta.

Def. *L'indice di positività n_+ di g è la massima dimensione di un sottospazio vettoriale W di V tale che la restrizione $g|_W$ di g a W sia definita positiva.*

Def. *L'indice di negatività n_- di g è la massima dimensione di un sottospazio vettoriale U di V tale che la restrizione $g|_U$ di g a U sia definita negativa.*

Def. *L'indice di nullità n_0 di g è la dimensione del radicale* $\mathrm{Rad}(g)$ *di g (anche detto annullatore di g).*

Teorema (Sylvester). *Esistono una base $\mathcal{E}$ di V e interi m_+, m_-, m_0 tali che la matrice rappresenta g rispetto a $\mathcal{E}$ sia esattamente $[g]_{\mathcal{E}} = \mathrm{diag}\big(1^{m_+}, (-1)^{m_-}, 0^{m_0}\big)$, dove*

$$\mathrm{diag}(1^{m_+}, (-1)^{m_-}, 0^{m_0}) := \left(\begin{array}{c|c|c} I_{m_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{m_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{m_0} \end{array}\right).$$

Inoltre, se $\mathcal{E}'$ è un'altra base di V tale che $[g]_{\mathcal{E}'} = \mathrm{diag}\big(1^{m'_+}, (-1)^{m'_-}, 0^{m'_0}\big)$, allora $m'_+ = m_+$, $m'_- = m_-$ e $m'_0 = m_0$.

(ii) Dimostrare che n_+, n_- e n_0 coincidono con il numero di autovalori rispettivamente positivi, negativi e nulli della matrice G.

Soluzione proposta (A).

Sia $F_{[\mathcal{B}]} : V \to \mathbb{R}^n$ il passaggio alla coordinate e $F^{[\mathcal{B}]} : \mathbb{R}^n \to V$ il suo inverso.

Sia m_+ il numero di autovalori positivi, m_- il numero di autovalori negativi e m_0 la dimensione del nucleo di G. Chiaramente $F^{[\mathcal{B}]}(\ker(G)) = \mathrm{Rad}(g)$ e dunque $m_0 = n_0$.

Poiché G è simmetrica, per il teorema spettrale è diagonalizzabile con autovalori reali, e dunque $m_+ + m_- + m_0 = \dim(V)$.

Sia ora $A_+ \subset \mathbb{R}^n$ la somma diretta degli autospazi di G corrispondenti ad autovalori positivi e sia $\mathcal{A}_+$ una base di A_+ di autovettori per G. Sia $V_+ = F^{[\mathcal{B}]}(A_+) \subset V$ e sia $\mathcal{B}_+ = F^{[\mathcal{B}]}(\mathcal{A}_+)$ la corrispondente base di V_+. Per definizione, $\dim(V_+) = \dim(A_+) = m_+$.

Chiaramente $[g|_{V_+}]_{[\mathcal{B}_+]}$ è una matrice diagonale con elementi strettamente positivi sulla diagonale, e dunque $g|_{V_+}$ è definito positivo. Ne segue che $n_+ \geq \dim(V_+) = m_+$.

In modo completamente analogo si dimostra che $n_- \geq m_-$.

Abbiamo quindi $n_+ + n_- + n_0 \geq m_+ + m_- + m_0 = \dim(V)$.

Sia ora $W \subset V$ un sottospazio di dimensione n_+ e tale che $g|_W$ è definito positivo, $U \subset V$ un sottospazio di dimensione n_- e tale che $g|_U$ è definito negativo. Chiaramente $W \cap U = \{0\}$, $W \cap \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$ e $U \cap \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$, e dunque $W \oplus U \oplus \mathrm{Rad}(g) \subseteq V$, da cui $\dim(V) \geq n_+ + n_- + n_0$.

Ne segue che $n_+ = m_+$ e $n_- = m_-$.

Soluzione proposta (B).

Basta mostrare che l'asserto vale per la forma bilineare definita da G su $\mathbb{R}^n$.
D'altronde, la matrice G rappresenta anche un endomorfismo simmetrico $G : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ (rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{E}^n$). Sia $\mathcal{B}'$ una base ortonormale di autovettori per G (che esiste per il teorema spettrale). Se $N = [\mathrm{id}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}$ è la matrice del cambio di coordinate da $\mathcal{B}'$ ad $\mathcal{E}$, si ha $N^{-1}GN = D = N^TGN$, con D matrice diagonale degli autovalori di G. Poiché N^TGN è la matrice che rappresenta la forma bilineare G rispetto alla base $\mathcal{B}'$, segue che gli indici n_+, n_- e n_0 coincidono rispettivamente con il numero di autovalori positivi, negativi e nulli della matrice G.

(iii) Completare la seguente definizione:
"La forma bilineare simmetrica g si dice non degenere se ..."

Soluzione proposta.

La forma bilineare simmetrica g si dice non degenere se, per ogni $0 \neq v \in V$, esiste $v' \in V$ tale che $g(v, v') \neq 0$.

Equivalentemente: La forma bilineare simmetrica g si dice non degenere se l'applicazione lineare $b_g : V \to V^*$ definita come $(b_g(v))(v') = g(v, v')$ è invertibile.

Sia ora $W \subset V$ un sottospazio vettoriale:

(iv) è vero che, se g è degenere, allora la restrizione $g|_W$ di g a W è degenere?

Soluzione proposta.

No.
Per esempio, sia $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}e_1$ e sia g definita dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora g è degenere ma $g|_W$ non lo è.

Ed è vero che, se g è non degenere, allora la restrizione $g|_W$ di g a W è non degenere?

Soluzione proposta.

No.
Per esempio, sia $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}e_1$ e sia g definita dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora g è non degenere ma $g|_W = 0$ e quindi è degenere.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^4$ lo spazio euclideo numerico quadridimensionale con *coordinate canoniche* (x_1, x_2, x_3, x_4).

Si consideri il piano Π in $\mathbb{E}^4$ generato dai vettori $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sia $p : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ la proiezione ortogonale su Π e sia $q : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ la riflessione ortogonale rispetto a Π.

(i) Determinare una base ortonormale ed equazioni cartesiane per Π.

Soluzione proposta.

I vettori b_1, b_2 sono chiaramente linearmente indipendenti, essendo non nulli e non proporzionali. Dunque una base ortogonale di Π è data da

$$b_1' = b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2' = b_2 - \frac{\langle b_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e una base ortonormale $\{v_1, v_2\}$ si ottiene ponendo $v_i = \frac{b_i'}{\|b_i'\|}$, da cui

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ di un iperpiano lineare che contenga Π soddisfa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

Dunque dobbiamo trovare una base del nucleo della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$*, per esempio*
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$*, il che corrisponde a* $\Pi = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0, \quad -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

(ii) Determinare le matrici P e Q che rappresentano rispettivamente p e q rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{E}^4$. Calcolare esplicitamente $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Soluzione proposta.

Essendo $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di Π, la proiezione p si ottiene ponendo $p(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2$ e la riflessione q è data da $q(v) = 2p(v) - v$. Calcoliamo

$$p(e_1) = 0 \qquad p(e_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(e_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad p(e_4) = \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = 2P - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$p\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2x_2 + x_3 + x_4}{3} \\ \frac{x_2 + 2x_3 - x_4}{3} \\ \frac{x_2 - x_3 + 2x_4}{3} \end{pmatrix}, \qquad q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \frac{x_2 + 2x_3 + 2x_4}{3} \\ \frac{2x_2 + x_3 - 2x_4}{3} \\ \frac{2x_2 - 2x_3 + x_4}{3} \end{pmatrix}.$$

(iii) Le applicazioni p, q sono isometrie di $\mathbb{E}^4$?

Soluzione proposta (A).

L'applicazione p ha nucleo $\ker(p) = \Pi^\perp \neq \{0\}$ *e dunque non è invertibile. Ne segue che p non è una isometria. Infatti, preso* $0 \neq v \in \Pi^\perp$, *avremo* $0 < \|v\| \neq \|p(v)\| = \|0\| = 0$.

L'applicazione q è una isometria. Infatti, ogni $v \in V$ *può essere scritto come* $v = p(v) + [v - p(v)]$, *con* $p(v) \in \Pi$ *e* $v - p(v) \in \Pi^\perp$. *Inoltre,* $q(v) = p(v) - [v - p(v)]$. *D'altra parte,* $\|v\|^2 = \|p(v)\|^2 + \|v - p(v)\|^2$ *e* $\|q(v)\|^2 = \|p(v)\|^2 + \|-[v - p(v)]\|^2$, *e quindi* $\|v\| = \|q(v)\|$.

Soluzione proposta (B).

È facile vedere che Q è una matrice ortogonale (ossia $Q^T Q = I$*) e dunque q è una isometria. D'altra parte, P non è una matrice ortogonale (ossia* $P^T P \neq I$*) e dunque p non è una isometria.*

Esercizio 3. Sia data la famiglia di coniche γ_s nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di equazioni:

$$\gamma_s : \ x^2 + sy^2 + 2(1 - s)x - 2sy + s + 1 = 0$$

rispetto alle coordinate canoniche (x, y) di $\mathbb{E}^2$.

Analisi preliminare degli invarianti della conica γ_s.

La conica γ_s *corrisponde alla matrice simmetrica*

$$Q_s = \left(\begin{array}{c|c} c_s & b_s^T \\ \hline b_s & A_s \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} s+1 & 1-s & -s \\ \hline 1-s & 1 & 0 \\ -s & 0 & s \end{array}\right)$$

Sviluppando con Laplace rispetto all'ultima colonna, otteniamo $\det(Q) = -s^2 + s[(s + 1) - (1 - s)^2] = -s^2 + s[-s^2 + 3s] = -s^3 + 2s^2 = s^2(2 - s)$. *Inoltre*

$$Q_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{array}\right), \qquad Q_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Otteniamo quindi le seguenti regioni:

regione	$\mathrm{rg}(Q_s)$	$\mathrm{rg}(A_s)$	$\lvert\sigma(Q_s)\rvert$	$\lvert\sigma(A_s)\rvert$	*forma canonica*	*tipo affine*
$s < 0$	3	2	1	0	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	*iperbole*
$s = 0$	1	1	1	1	$x^2 = 0$	*retta doppia*
$0 < s < 2$	3	2	3	2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	*ellisse immaginaria*
$s = 2$	2	2	2	2	$x^2 + y^2 = 0$	*rette immaginarie incidenti*
$s > 2$	3	2	1	2	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	*ellisse reale*

Determinare i valori del parametro $s \in \mathbb{R}$ per cui:

(i) γ_s non ha punti reali;

SOLUZIONE. *Per* $0 < s < 2$.

(ii) il supporto di γ_s è un punto;

SOLUZIONE. *Per* $s = 2$.

(iii) il supporto di γ_s è una retta;

SOLUZIONE. *Per* $s = 0$.

(iv) γ_s è una parabola;

SOLUZIONE. *Per nessun* s.

(v) γ_s è un'iperbole;

SOLUZIONE. *Per* $s < 0$.

(vi) γ_s è un'ellisse (non degenere) con punti reali;

SOLUZIONE. *Per* $s > 2$.

(vii) γ_s è una circonferenza con punti reali (e raggio positivo).

SOLUZIONE. *Per nessun* s.
Infatti, γ_s *dovrebbe essere in particolare una ellisse reale, e quindi necessariamente* $s > 2$. *Inoltre,* A_s *dovrebbe essere un multiplo dell'identità, e questo non accade per alcun* $s > 2$.