Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta del 10 febbraio 2016

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Canale: ☐ Canale A-H ☐ Canale I-Z

INTENDO AFFRONTARE : *(mettere una sola crocetta)*

☐ LA PROVA SCRITTA COMPLETA IN TRE ORE DI TEMPO *(e rinuncio ad avvalermi della prova in itinere)*

☐ SOLO GLI ESERCIZI 3 E 4 IN DUE ORE DI TEMPO *(e mi avvalgo della prova in itinere)*

☐ SOLO GLI ESERCIZI 1 E 2 IN DUE ORE DI TEMPO *(e sosterrò la seconda metà al prossimo appello)*

Motivare le risposte: una risposta giusta priva di motivazione, o con una motivazione errata, riceverà 0 *punti.*

Esercizio	Punti disponibili	Punti ottenuti
1	16	
2	16	
3	16	
4	16	
Totale	32	

(Nel caso si sostenga la prova completa, il punteggio totale è dato dalla somma dei punteggi agli esercizi, diviso per due.)

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo numerico tridimensionale munite delle coordinate canoniche (x, y, z). Si considerino le rette:

$$r := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \,\middle|\, x - y + 1 = y - z - 1 = 0 \right\} \qquad s := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \,\middle|\, x - z + 1 = y = 0 \right\}.$$

(i) Stabilire se r e s siano complanari o sghembe.

(ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano Π parallelo a r che contiene s.

(iii) Calcolare la distanza $d = d(r, s)$ tra r e s.

(iv) Esistono due punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che $d(R, S) = d(r, s)$?

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo numerico tridimensionale con coordinate canoniche (x, y, z).
Si consideri il piano Π in $\mathbb{E}^3$ di equazione $x + y - z = 0$.
Sia $p : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la proiezione ortogonale su Π e sia $q : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione ortogonale rispetto a Π.

(i) Determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormale equiversa di $\mathbb{E}^3$ tale che $v_1, v_2 \in \Pi$ e $v_3 \perp \Pi$.

(ii) Determinare le matrici P, Q che rappresentano rispettivamente p e q rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(iii) Determinare esplicitamente quando valgono $p(x, y, z)$ e $q(x, y, z)$.
(Si ricorda che (x, y, z) sono le coordinate rispetto alla base canonica).

(iv) Sia G il sottogruppo delle trasformazioni ortogonali $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ tali che $A \circ p = p \circ A$.
Si dimostri che q e tutte le rotazioni di asse $n = \Pi^\perp$ appartengono a G; G è generato da tali trasformazioni?
(Suggerimento: usare $A(p(v_i)) = p(A(v_i))$ per $i = 1, 2, 3$.)

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $\mathbb{E}^2$ lo spazio euclideo numerico bidimensionale con coordinate canoniche (x, y).
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la conica

$$C_\alpha = \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \,\middle|\, x^2 + \alpha y^2 + 2x - 2\alpha y + 1 = 0\right\}.$$

(i) Classificare C_α a meno di *affinità* di $\mathbb{E}^2$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la conica C_α è *metricamente* equivalente alla conica C di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$?

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ lo spazio proiettivo numerico reale tridimensionale con coordinate omogenee standard $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$. Sia $j_0 : \mathbb{R}^3 \to U_0 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ l'identificazione standard di $\mathbb{R}^3$ con $U_0 = \{X_0 \neq 0\}$, e siano (x, y, z) le coordinate affini canoniche di $\mathbb{R}^3$.
Siano dati il piano Π e la retta r di equazioni

$$\Pi : \quad 3X_0 + X_2 + X_3 = 0, \qquad\qquad r : \quad X_0 + X_1 = X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

(i) Determinare le coordinate omogenee di $P = \Pi \cap r$.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle parti affini $j_0^{-1}(\Pi)$ e $j_0^{-1}(r)$ nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Stabilire se i sottospazi affini $j_0^{-1}(\Pi)$ e $j_0^{-1}(r)$ siano paralleli in $\mathbb{R}^3$.

(iv) Dire se esista una proiettività $\Phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che mandi Π nel piano $\{X_0 = 0\}$ e la retta r nella retta di equazioni $X_1 = X_2 = 0$.

Risoluzione: