Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Soluzioni della prova scritta del 10 febbraio 2016

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo numerico tridimensionale munite delle coordinate canoniche (x, y, z). Si considerino le rette:

$$r := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \,\middle|\, x - y + 1 = y - z - 1 = 0\right\} \qquad s := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \,\middle|\, x - z + 1 = y = 0\right\}.$$

(i) Stabilire se r e s siano complanari o sghembe.

Soluzione.
Chiaramente $r \cap s = \emptyset$, dato che il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Dunque r, s sono o parallele o sghembe.
D'altra parte, le giaciture delle due rette sono

$$\vec{r} = \{x - y = y - z = 0\} = \mathbb{R}u, \quad \vec{s} = \{x - z = y = 0\} = \mathbb{R}v$$

con $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, 0, 1)$. Essendo le giaciture distinte, concludiamo che r, s sono sghembe.

(ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano Π parallelo a r che contiene s.

Soluzione.
La giacitura $\vec{\Pi}$ deve necessariamente contenere $\vec{r}$ e $\vec{s}$, e dunque un rapido conto dà $\vec{\Pi} = \{x - z = 0\}$. Ne segue che il piano voluto Π ha equazione $x - z = c$, e la costante c si determina imponendo che Π passi per un punto della retta s, per esempio $S' = (0, 0, 1)$: otteniamo così $c = -1$. Il piano cercato è dunque $\Pi = \{x - z + 1 = 0\}$.

(iii) Calcolare la distanza $d = d(r, s)$ tra r e s.

Soluzione.
Il piano $\Pi' = \{x - z = b\}$ parallelo a Π e passante per r si ottiene imponendo il passaggio per un punto di r, per esempio $R' = (0, 1, 0)$. Otteniamo così $b = 0$ e $\Pi' = \{x - z = 0\}$. Chiaramente $d(r, s) = d(\Pi, \Pi')$.
Un vettore ortogonale a $\vec{\Pi}$ è $n = (1, 0, -1)$ e $\Pi = \Pi' + \frac{1}{2}n$, da cui $d(\Pi, \Pi') = \frac{1}{2}\|n\| = \sqrt{2}$.

(iv) Esistono due punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che $d(R, S) = d(r, s)$?

Soluzione.
Una parametrizzazione della retta r è data da $r = \{R' + tu = (0, 1, 0) + t(1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. La proiezione $\pi(r)$ della retta r sul piano Π è data da $\pi(r) = r - \frac{n}{2} = \{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) + t(1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Il punto cercati sono dunque $S = \pi(r) \cap s = (-\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ e $R = S + \frac{1}{2}n = (-1, 0, -1)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo numerico tridimensionale con coordinate canoniche (x, y, z).
Si consideri il piano Π in $\mathbb{E}^3$ di equazione $x + y - z = 0$.
Sia $p : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la proiezione ortogonale su Π e sia $q : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione ortogonale rispetto a Π.

(i) Determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormale equiversa di $\mathbb{E}^3$ tale che $v_1, v_2 \in \Pi$ e $v_3 \perp \Pi$.

Soluzione.
Un vettore w_3 ortogonale a Π è dato da $w_3 = (-1, -1, 1)$. Una base $\{w_1, w_2\}$ di Π si ottiene facilmente: per esempio $w_1 = (1, 0, 1)$ e $w_2 = (0, 1, 1)$.
Per ottenere una base ortonormale, poniamo $v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$ e $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. Otteniamo quindi $\tilde{v}_2$ proiettando w_2 su $\Pi \cap v_1^\perp$ e poi ponendo $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}$. Calcoliamo $\tilde{v}_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$.
Per verificare se la base ottenuta sia equiversa, calcoliamo

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right) = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{6} > 0$$

e dunque la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è equiversa.

(ii) Determinare le matrici P, Q che rappresentano rispettivamente p e q rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione.
Chiaramente $P(v_1) = v_1$, $P(v_2) = v_2$ e $P(v_3) = 0$, mentre $Q(v_1) = v_1$, $Q(v_2) = v_2$ e $Q(v_3) = -v_3$. Ne segue che

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(iii) Determinare esplicitamente quando valgono $p(x, y, z)$ e $q(x, y, z)$.
(Si ricorda che (x, y, z) sono le coordinate rispetto alla base canonica).

Soluzione.
Dobbiamo determinare $[p]_C^C$ e $[q]_C^C$, dove C è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si ha

$$[p]_C^C = [id]_{\mathcal{B}}^C [p]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [id]_C^{\mathcal{B}}$$

ma $[id]_C^{\mathcal{B}} = ([id]_{\mathcal{B}}^C)^{-1} = ([id]_{\mathcal{B}}^C)^T$, perché $\mathcal{B}$ e C sono basi ortonormali e quindi $[id]_C^{\mathcal{B}}$ è una matrice ortogonale. Chiaramente

$$[id]_{\mathcal{B}}^C = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad [id]_C^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$[p]_C^C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In modo simile

$$[q]_C^C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) Sia G il sottogruppo delle trasformazioni ortogonali $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ tali che $A \circ p = p \circ A$.
Si dimostri che q e tutte le rotazioni di asse $n = \Pi^\perp$ appartengono a G; G è generato da tali trasformazioni?
(Suggerimento: usare $A(p(v_i)) = p(A(v_i))$ per $i = 1, 2, 3$.)

Soluzione.

Chiaramente $PQ = QP$ e dunque $pq = qp$. Tuttavia $\det(q) = \det(Q) = -1$*, dunque q non appartiene a G* [ERRORE NEL TESTO DELL'ESERCIZIO].

Inoltre, sia r una rotazione r di asse $\Pi^\perp$. Allora $r(v_1), r(v_2) \in \Pi$ e $r(v_3) = \pm v_3$. Ne segue che $rp(v_1) = r(v_1) = pr(v_1)$ e $rp(v_2) = r(v_2) = pr(v_2)$ e che $rp(v_3) = 0 = pr(v_3)$, da cui $r \in G$ (notiamo che $\det(r) = 1$*).*

D'altra parte, sia $A \in G$. Allora $p(A(v_3)) = A(p(v_3)) = A(0) = 0$, da cui $A(v_3) \in$ $\ker(p) = \mathbb{R}v_3$. *Ne segue che $A(\Pi^\perp) = \Pi^\perp$ e quindi $A(\Pi) = \Pi$, ed inoltre $B := A|_\Pi^\Pi : \Pi \to \Pi$ è ortogonale.*

Essendo A ortogonale, può aversi solo $A(v_3) = v_3$ oppure $A(v_3) = -v_3$.

Se $A(v_3) = v_3$, allora $\det(B) = 1$ *e dunque B è una rotazione di* Π. *Ne segue che A è una rotazione con asse* $\Pi^\perp$.

Se $A(v_3) = -v_3$, allora $\det(B) = -1$ *e dunque B è una riflessione ortogonale di* Π. *Ne segue che A è una riflessione ortogonale rispetto ad una retta contenuta in* Π.

Concludiamo che G è il gruppo costituito dalle rotazioni di asse $\Pi^\perp$ *e dalle riflessioni ortogonali rispetto ad una retta contenuta in* Π.

Fissiamo una retta ℓ in Π *e sia $\rho \in G$ la riflessione ortogonale rispetto a tale retta. Se $A \in G$ e $A(v_3) = -v_3$, allora $A\rho \in G$ e $A\rho(v_3) = v_3$. Ne segue che $A\rho$ è una rotazione di asse* $\Pi^\perp$.

Concludiamo che G è generato dalle rotazioni di asse $\Pi^\perp$ *e dall'elemento ρ.*

Esercizio 3. Sia $\mathbb{E}^2$ lo spazio euclideo numerico bidimensionale con coordinate canoniche (x, y).
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la conica

$$C_\alpha = \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \,\middle|\, x^2 + \alpha y^2 + 2x - 2\alpha y + 1 = 0\right\}.$$

(i) Classificare C_α a meno di *affinità* di $\mathbb{E}^2$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione.
La matrice Q_α associata alla conica affine C_α è

$$Q_\alpha = \left(\begin{array}{c|c} c & v_\alpha^T \\ \hline v_\alpha & A_\alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & -\alpha \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

e inoltre $\det(Q_\alpha) = -\alpha^2$ *e* $\det(A_\alpha) = \alpha$.

Se $\alpha = 0$, allora Q_0 ha rango 1 e quindi C_0 è una retta doppia.

Se $\alpha \neq 0$, la matrice Q_α ha rango 3 e la matrice A_α ha rango 2.

Inoltre, se $\alpha < 0$, allora A_α non è definita, e dunque C_α è una iperbole.

Se $\alpha > 0$, allora A_α è definita positiva e Q_α non è definita (perché $\det(Q_\alpha) < 0$*): ne segue che C_α è una ellisse reale.*

(ii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la conica C_α è *metricamente* equivalente alla conica C di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$?

Soluzione.
La conica C è una ellisse reale e la sua matrice associata è

$$Q = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Dunque, la conica C_α è isometrica a C se e solo se esiste una costante $\lambda \neq 0$ tale che la matrice Q sia equivalente alla matrice tQ_α (ossia abbia gli stessi invarianti metrici).

Per Q, calcoliamo $\det(Q) = -2$ *e* $\det(A) = 2$.

Trattandosi di una ellisse reale, deve certamente aversi $\alpha > 0$. In tal caso, $\det(tQ_\alpha) = -t^3\alpha^2$ *e* $\det(tA_\alpha) = t^2\alpha$.

Dunque, se C_α è isometrica a C, allora esiste un $t \neq 0$ tale che

$$\begin{cases} -t^3\alpha^2 = -2 \\ t^2\alpha = 2 \end{cases}$$

da cui otteniamo $t = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

In effetti, per $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo che $\det(2Q_{1/2}) = \det(Q)$, $\det(2A_{1/2}) = \det A$ *ed inoltre $2A_{1/2}$ ha lo stesso insieme di autovalori $\{1, 2\}$ di A. Ne segue che (Q, A) e $(Q_{1/2}, A_{1/2})$ hanno gli stessi invarianti metrici e dunque le coniche loro associate sono isometriche.*

Concludiamo che C_α è isometrica a C se e solo se $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ lo spazio proiettivo numerico reale tridimensionale con coordinate omogenee standard $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$. Sia $j_0 : \mathbb{R}^3 \to U_0 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ l'identificazione standard di $\mathbb{R}^3$ con $U_0 = \{X_0 \neq 0\}$, e siano (x, y, z) le coordinate affini canoniche di $\mathbb{R}^3$.
Siano dati il piano Π e la retta r di equazioni

$$\Pi : \quad 3X_0 + X_2 + X_3 = 0, \qquad\qquad r : \quad X_0 + X_1 = X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

(i) Determinare le coordinate omogenee di $P = \Pi \cap r$.

Soluzione.
Per calcolare $\Pi \cap r$, risolviamo

$$\begin{cases} 3X_0 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_0 + X_1 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e otteniamo come unica soluzione $P = [0 : 0 : 1 : -1]$.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle parti affini $j_0^{-1}(\Pi)$ e $j_0^{-1}(r)$ nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.
L'applicazione j_0 è data da $j_0(x_1, x_2, x_3) = (1, x_1, x_2, x_3)$. Dunque

$$j_0^{-1}(\Pi) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3 + x_2 + x_3 = 0\right\}$$

$$j_0^{-1}(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

(iii) Stabilire se i sottospazi affini $j_0^{-1}(\Pi)$ e $j_0^{-1}(r)$ siano paralleli in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.
Il punto P non giace in U_0, e dunque $j_0^{-1}(r) \cap j_0^{-1}(\Pi) = r \cap \Pi \cap U_0 = \emptyset$. Trattandosi di un piano e di una retta affine in $\mathbb{R}^3$ disgiunti, devono necessariamente essere paralleli.

(iv) Dire se esista una proiettività $\Phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che mandi Π nel piano $\{X_0 = 0\}$ e la retta r nella retta di equazioni $X_1 = X_2 = 0$.

Soluzione.
Costruiamo una proiettività Φ che soddisfi le richieste nel modo seguente.

Sia $\tilde{\Pi} \subset \mathbb{R}^4$ l'iperpiano di equazione $3X_0+X_2+X_3 = 0$ e $\tilde{r} \subset \mathbb{R}^4$ il piano di equazioni $X_0+X_1 = X_1+X_2+X_3 = 0$ e sia $\tilde{P} = \mathbb{R}(e_2 - e_3)$ la loro intersezione.

Sia $v_3 = e_2 - e_3$. Completiamo $\{v_3\}$ ad una base $\{v_0, v_3\}$ di $\tilde{r}$, e ad una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\tilde{\Pi}$. Ne segue che $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Ora consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $F(v_i) = e_i$, dove $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^4$. Chiaramente F è invertibile e manda $\tilde{r}$ nel piano di equazione $X_1 = X_2 = 0$ e l'iperpiano $\tilde{\Pi}$ nell'iperpiano di equazione $X_0 = 0$. E chiaro che $\Phi := \mathbb{P}(F)$ è la proiettività voluta.