Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta in itinere

9 novembre 2015

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	12,5	
2	10	
3	10	
Totale	32,5	

Occorre motivare le risposte: una risposta giusta priva di motivazione, o con una motivazione errata, riceverà 0 *punti.*

Voto/30:

Esercizio 1. Siano Π, Π', L, L' sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ definiti da

$$\Pi = \{x - 2y - z = 2\} \qquad \Pi' = \{x - 2y + z = 4\}$$
$$L = \{x - 1 = z - 1 = 0\} \qquad L' = \{2x = 2z = 1 - y\}$$

dove x, y, z sono le coordinate standard di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare una base $\{v_1, v_2\}$ di $\vec{\Pi}$, una base $\{v'_1, v'_2\}$ di $\vec{\Pi}'$, una base $\{u\}$ di $\vec{L}$ ed una base $\{u'\}$ di $\vec{L}'$.

(b) Definire un automorfismo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (cioè un endomorfismo biiettivo) che mandi $\vec{\Pi}$ in $\vec{\Pi}'$ ed $\vec{L}$ in $\vec{L}'$ e calcolare la matrice che rappresenta $\vec{f}$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, u\}$ in partenza e $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, u'\}$ in arrivo.

(c) Calcolare la matrice che rappresenta $\vec{f}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ (in partenza e in arrivo).

(d) Determinare, se esiste, un'affinità $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(\Pi) = \Pi'$ e $f(L) = L'$.

(e) Determinare, se esiste, un'isometria $g : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ dello spazio affine euclideo tale che $g(\Pi) = \Pi'$ e $g(L) = L'$.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ definita da $b(v, w) := v^T A w = v \cdot A(w)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Esibire una base di $\mathrm{Ann}(b)$ (anche detto radicale di b).

(b) Trovare, se esiste, un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo per b tale che $v \notin \mathrm{Ann}(b)$.

(c) Esibire una base $\mathcal{B}$ di Sylvester per b.

(d) Calcolare gli indici di positività, negatività e nullità di b.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione affine definita come $f(x) = Ax + v$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se f sia un'affinità. Dire se f sia un'isometria dello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^2$.

(b) Determinare un'equazione cartesiana per $f(L)$ con $L = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = 0 \right\}$.

(c) Determinare il più grande sottoinsieme $S \subset \mathbb{E}^2$ sul quale f^k vale l'identità per ogni intero $k > 0$.

(d) Dire se esiste un intero $k > 0$ tale che f^k sia l'identità.

Risoluzione: