Geometria I (Canale A-H)

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta in itinere

9 novembre 2015

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	12,5	
2	10	
3	10	
Totale	32,5	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Siano Π, Π', L, L' sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ definiti da

$$\Pi = \{x - 2y - z = 2\} \qquad \Pi' = \{x - 2y + z = 4\}$$
$$L = \{x - 1 = z - 1 = 0\} \qquad L' = \{2x = 2z = 1 - y\}$$

dove x, y, z sono le coordinate standard di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare una base $\{v_1, v_2\}$ di $\vec{\Pi}$, una base $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2\}$ di $\vec{\Pi}'$, una base $\{\vec{u}\}$ di $\vec{L}$ ed una base $\{\vec{u}'\}$ di $\vec{L}'$.

(b) Definire un automorfismo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (cioè un endomorfismo biiettivo) che mandi $\vec{\Pi}$ in $\vec{\Pi}'$ ed $\vec{L}$ in $\vec{L}'$ e calcolarne la matrice $[\vec{f}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ che rappresenta $\vec{f}$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, u\}$ in partenza e $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, u'\}$ in arrivo.

(c) Calcolare la matrice $[\vec{f}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ che rappresenta $\vec{f}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ (in partenza e in arrivo).

(d) Determinare, se esiste, un'affinità $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(\Pi) = \Pi'$ e $f(L) = L'$.

(e) Determinare, se esiste, un'isometria $g : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ dello spazio affine euclideo tale che $g(\Pi) = \Pi'$ e $g(L) = L'$.

Risoluzione:

(a) Due basi possibili sono le seguenti:

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}' = \left\{ v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Poiché $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, possiamo definire $\vec{f}$ come l'unico omomorfismo $\mathbb{R}$-lineare tale che $\vec{f}(v_1) = v'_1$, $\vec{f}(v_2) = v'_2$ e $\vec{f}(u) = u'$. Dato che anche $\mathcal{B}'$ è una base di $\mathbb{R}^3$, tale $\vec{f}$ è in effetti un automorfismo.
Per definizione, la matrice che rappresenta $\vec{f}$ rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{B}'$ in arrivo è

$$[\vec{f}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Per definizione di $\mathcal{B}$, la matrice che rappresenta l'identità di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica $\mathcal{E}$ in arrivo è

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque la matrice che rappresenta l'identità di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\mathcal{E}$ in partenza e $\mathcal{B}$ in arrivo è la sua inversa

$$[id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In modo simile, sempre per definizione

$$[id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In conclusione, la matrice che rappresenta $\vec{f}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ in partenza e in arrivo è

$$[\vec{f}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{E}} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Da un calcolo diretto, si ha

$$p = \Pi \cap L = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p' = \Pi' \cap L' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato che $f(x) = \vec{f}(x) + v$ per un qualche $v \in \mathbb{R}^3$, tale vettore può essere determinato imponendo $f(p) = p'$. Si ottiene così

$$f(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(e) Una tale g non esiste.
Infatti, si può notare che L' è ortogonale a Π', in quanto $\langle u', v'_1 \rangle = \langle u', v'_2 \rangle = 0$. D'altra parte, L non è ortogonale a Π, in quanto $\langle u, v_2 \rangle = 1 \neq 0$. Dunque, se g manda L in L' e Π in Π', necessariamente non potrà conservare gli angoli e quindi non potrà essere una isometria.

Esercizio 2. Sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ definita da $b(v, w) := v^T Aw = v \cdot A(w)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Esibire una base di $\mathrm{Ann}(b)$ (anche detto radicale di b).

(b) Trovare, se esiste, un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo per b tale che $v \notin \mathrm{Ann}(b)$.

(c) Esibire una base $\mathcal{B}$ di Sylvester per b.

(d) Calcolare gli indici di positività, negatività e nullità di b.

Risoluzione:

(a) La matrice A ha chiaramente rango 2 e una base del radicale di b si calcola facilmente, per esempio $\{v_0 = 2e_2 - e_3\}$.

(b) Poiché $b(e_1, e_1) = A_{1,1} = 0$, ne segue che il vettore e_1 è isotropo. D'altra parte, e_1 non è multiplo di v_0 e dunque non è nel radicale di b.

(c) Vogliamo intanto determinare una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ ortogonale per b.

Possiamo iniziare, completando l'insieme $\{v_0\}$ di vettori indipendenti ad una base di $\mathbb{R}^3$ usando vettori della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Per esempio, una tale base è $\{v_0, e_1, e_2\}$. Dunque $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ann(b)} \oplus W$, dove $W := \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$.

Ora, b ristretto a W non è degenere e in effetti

$$[b]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Cerchiamo una base ortogonale $\mathcal{B}_W$ di W.
Purtroppo e_1 è isotropo, ma e_2 non lo è. Dunque scegliamo e_2 come primo vettore della nostra base ortogonale $\mathcal{B}_W$. Il secondo vettore di $\mathcal{B}_W$ sarà un vettore non nullo in W (e indipendente da e_2), ovvero del tipo $e_1 + te_2$, e ortogonale a e_2. Calcolando $b(e_2, e_1 + te_2) = 1 + t$, da cui otteniamo $t = -1$ e quindi il secondo vettore cercato è $e_1 - e_2$. Ne segue che $\mathcal{B}_W = \{e_2, e_1 - e_2\}$ e dunque $\mathcal{B}' = \{v_0, e_2, e_1 - e_2\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Per ottenere una base di Sylvester, dobbiamo normalizzare i vettori non isotropi e_2 e $e_1 - e_2$. Un calcolo diretto dà $b(e_2, e_2) = 1$ e $b(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = -1$. Poniamo quindi $v_1 := e_2$ e $v_{-1} := e_1 - e_2$.

Concludendo, $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, v_{-1}\}$ è una base di Sylvester per b.

(d) Dai risultati in (c) concludiamo che $n_0 = n_+ = n_- = 1$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione affine definita come $f(x) = Ax + v$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se f sia un'affinità. Dire se f sia un'isometria dello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^2$.

(b) Determinare un'equazione cartesiana per $f(L)$ con $L = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = 0 \right\}$.

(c) Determinare l'insieme $\mathrm{Fix}(f)$ dei punti fissi di f.

(d) Dire se esiste un intero $k \neq 0$ tale che f^k sia l'identità.

Risoluzione:

(a) $\vec{f}$ è invertibile, dunque f è un'affinità.
$\vec{f}$ non è ortogonale, dunque f non è un'isometria.

(b) Da un calcolo diretto, si ottiene

$$f(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 2y+1 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

ed è immediato notare che $f(L)$ sia descritto dall'equazione $x_1 - 2x_2 = 1$.

Un modo alternativo è il seguente: calcoliamo prima l'equazione omogenea per $\vec{f}(\vec{L}) = \overrightarrow{f(L)}$.
Consideriamo $\vec{f} = A : V = \mathbb{R}^2 \to W = \mathbb{R}^2$. L'annullatore di L è generato da $e_1^* \in V^*$ e dunque l'annullatore di $\vec{f}(L)$ è dato da $(\vec{f}^{-1})^*(e_1^*) \in W^*$, dove $(\vec{f}^{-1})^* : V^* \to W^*$. Poiché $(\vec{f}^{-1})^*$ è rappresentata da $(A^{-1})^T$ e e_1^* è rappresentato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica duale di $\mathbb{R}^2$, e poiché

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A^{-1})^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

otteniamo

$$(A^{-1})^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e dunque $\overrightarrow{f(L)} = \{x_1 - 2x_2 = 0\}$.

Dunque $f(L)$ deve essere descritto dall'equazione $x_1 - 2x_2 = c$ per una certa $c \in \mathbb{R}$. Per determinare c, imponiamo la condizione che $f(L)$ contenga $f(0) = v$ e dunque che $v_1 - 2v_2 = c$, da cui segue che $c = 1$.

Concludiamo che $f(L) = \{x_1 - 2x_2 = 1\}$.

(c) L'insieme dei punti fissi è

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x\}$$

e dunque, se non vuoto, è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^2$ i cui punti x risolvono l'equazione $Ax + v = x$, ossia $(A - I)x = -v$. Concretamente

$$(A - I)x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che il punto $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione e dunque appartiene a $\mathrm{Fix}(f)$.

Ne segue che $\mathrm{Fix}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ker(A - I)$.

Notiamo che $A - I$ ha rango 1 e il suo nucleo è generato da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque

$$\mathrm{Fix}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In termini di equazione cartesiana,

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 + 1 = 0\}.$$

(d) Non esiste alcun intero $k \neq 0$ tale per cui f^k sia l'identità.

Infatti, supponiamo che $f^k = id$ e quindi $\overrightarrow{(f^k)} = id$. Poiché $\overrightarrow{(f^k)} = \left(\vec{f}\right)^k = A^k$, ne segue che $A^k = id$.

Notiamo che e_1 è autovettore di A con autovalore 2: ne segue che $A^k e_1 = 2^k e_1$, ossia $1 = (id)_{11} = (A^k)_{11} = 2^k$, da cui $k = 0$.