Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta in itinere del 9/11/2015
Errori più comuni (Canale A-H)

Lista degli errori più comuni e più rilevanti

(a) L'errore più comune e più grave è stato non saper scrivere **la matrice $[\vec{f}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ che rappresenta un'applicazione lineare $\vec{f} : V \to W$ rispetto a basi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ in partenza e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ in arrivo**.

(b) Confondere "applicazione affine" con "affinità".

(c) Pensare che le applicazioni "ortogonali" siano quelle che soddisfano det = ±1.

(d) Non riconoscere che un'applicazione affine $f : E \to E$ di uno spazio affine *euclideo* in sé è una **isometria (affine)** $\iff$ la sua giacitura $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ (che è un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale euclideo in sé) è ortogonale.

(e) Non ricordarsi che, se $f : E \to E$ è un'applicazione affine, allora la giacitura di f^k è $\left(\vec{f}\right)^k$.

Spiegazioni ed esempi

(a) Se chiamiamo $M = [\vec{f}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ la matrice che rappresenta l'applicazione $\mathbb{K}$-lineare $\vec{f} : V \to W$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V in partenza e alla base $\mathcal{B}'$ di W in arrivo, allora l'entrata M_{ij} si determina come segue:

- prendo il j-esimo elemento della base $\mathcal{B}$ di V, ossia v_j;
- calcolo $\vec{f}(v_j) \in W$;
- scrivo $\vec{f}(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ di W, ossia determino gli scalari $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$ (che sono unici!) tali che
$$\vec{f}(v_j) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_m w_m$$
- concludo che $M_{ij} = c_i$.

Piú operativamente, supponiamo di conoscere l'espressione di $\vec{f}$ rispetto a una base $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ in partenza e $\mathcal{C}' = \{w'_1, \dots, w'_m\}$ in arrivo, ovvero di conoscere la matrice $[\vec{f}]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$, allora

$$[\vec{f}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = [id_W]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} \cdot [\vec{f}]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'} \cdot [id_V]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$$

Ancora più concretamente, supponiamo $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ e supponiamo che $\mathcal{B}$ sia la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ sia la base canonica di $\mathbb{R}^m$. Allora
$$\left([id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right) = \left(v'_1 \middle| v'_2 \middle| \cdots \middle| v'_n\right)$$
nel senso che $[id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è la matrice che ha come k-esima colonna le entrate di $v'_k \in \mathbb{R}^n$. Inoltre

$$[id_V]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \left([id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$$

In modo simile,
$$[id_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} = \left(w'_1 \middle| w'_2 \middle| \cdots \middle| w'_m\right)$$

Esempio. Supponiamo $n = m$ e supponiamo che $\vec{f}$ sia l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che $\vec{f}(v'_k) = w'_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Allora

$$[\vec{f}]^{C'}_{\mathcal{B}'} = I_n$$

è l'identità $n \times n$, e dunque

$$[\vec{f}]^{C}_{\mathcal{B}} = \left(w'_1 \middle| w'_2 \middle| \cdots \middle| w'_m\right) \cdot \left(v'_1 \middle| v'_2 \middle| \cdots \middle| v'_n\right)^{-1}$$

(b) Distinzione fra "applicazione affine" e "affinità".

- Un'**applicazione affine** $f : E \to F$ è semplicemente un'applicazione che soddisfa

$$f(p + v) = f(p) + \vec{f}(v)$$

dove $v \in \vec{E}$ e $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ è la giacitura di f (che è un'applicazione lineare).
Supponiamo V, W spazi vettoriali e siano $E = V$ e $F = W$ visti come spazi affini (rispettivamente con $\vec{E} = V$ e $\vec{F} = W$). Allora un'applicazione affine $f : V \to W$ si può scrivere come

$$f(p) = \vec{f}(p) + w_0$$

dove $\vec{f} : V \to W$ è un'applicazione lineare e $w_0 \in W$ è un vettore fissato.
In particolare, supponiamo $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$. Allora un'applicazione affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si può scrivere come

$$f(x) = Ax + b$$

dove A è la matrice (con n colonne e m righe) che rappresenta l'applicazione lineare $A = \vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato.

- Un'**affinità di** E è un'applicazione affine $f : E \to E$ da uno spazio affine E in sé, che sia anche invertibile. Ricordiamo che f è invertibile $\iff$ f iniettiva $\iff$ f suriettiva $\iff$ $\vec{f}$ invertibile $\iff$ $\vec{f}$ iniettiva $\iff$ $\vec{f}$ suriettiva $\iff$ $\det(\vec{f}) \neq 0$.
Dunque, un'applicazione affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che si scriva come

$$f(x) = Ax + b$$

è un'affinità di $\mathbb{R}^n$ $\iff$ $\det(A) \neq 0$.

(c) Se (V, b) è uno spazio vettoriale euclideo (ossia b è una forma bilineare simmetrica definita positiva, con norma associata $\|\cdot\|$), allora le applicazioni **ortogonali di** (V, b) **in sé** $g \in \mathrm{O}(V, b)$ sono le applicazioni lineari $g : V \to V$ tali che

$$b(g(v), g(v')) = b(v, v') \quad \forall v, v' \in V$$

Per la formula di polarizzazione, tale condizione è equivalente a chiedere

$$\|g(v)\|^2 = b(g(v), g(v)) = b(v, v) = \|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

Supponiamo ora $(V, b) = \mathbb{E}^n$ lo spazio vettoriale euclideo numerico standard, ossia $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare b standard. [Si usa la notazione $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(\mathbb{E}^n)$.]
Allora, per una matrice B quadrata $n \times n$ reale, le seguenti condizioni sono equivalenti:

* $B \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, ossia B è una matrice ortogonale
* $B^t B = I$
* le colonne di B formano una base ortonormale di $\mathbb{E}^n$
* le righe di B formano una base ortonormale di $\mathbb{E}^n$.

In particolare, B ortogonale $\implies$ $\det(B) = \pm 1$, e quindi B conserva il volume.
Controesempio. Esistono applicazioni lineari che conservano il volume (ossia hanno $\det = \pm 1$) ma non sono ortogonali. Un semplice esempio è dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Infatti A soddisfa $\det(A) = 1$ ma le colonne di A non formano una base ortonormale di $\mathbb{E}^2$: in effetti, le colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sono vettori ortogonali di $\mathbb{E}^2$, ma non hanno norma euclidea 1.

(d) Uno spazio affine *euclideo* è uno spazio affine E la cui giacitura $\vec{E}$ è munita di un prodotto scalare b (quindi definito positivo). Dunque, si può definire

* la *norma di un vettore* $v \in \vec{E}$ come
$$\|v\| := \sqrt{b(v,v)}$$
(ossia misuro "l'ampiezza dello spostamento v");
* la *distanza tra due punti* $p, q \in E$ come
$$d(p,q) := \left\|\overrightarrow{pq}\right\| = \sqrt{b\left(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}\right)}$$
(ossia misuro "l'ampiezza dello spostamento necessario per portare il punto p nel punto q").

[Sottolineiamo che non è definita la norma di un punto di E. A volte si genera una certa confusione quando si lavora nello spazio affine euclideo numerico standard $\mathbb{E}^n$, in quanto un punto $P \in \mathbb{E}^n$ ha le stesse entrate del vettore $v = \overrightarrow{OP}$. Tuttavia sarebbe sempre corretto scrivere $\|v\|$ oppure $\left\|\overrightarrow{OP}\right\|$, ma evitare di scrivere $\|P\|$. Allora stesso modo, se v, w sono vettori di $\mathbb{R}^n$, essi hanno le stesse entrate dei punti $O+v$ e $O+w$: dunque, si possono calcolare le distanze $d(O+v, O+w)$ ma sarebbe scorretto scrivere $d(v,w)$.]

Abbiamo detto che un'applicazione affine $f : E \to E$ di uno spazio affine *euclideo* in sé è una **isometria (affine)** se preserva la distanza, ossia se
$$d(f(p), f(q)) = d(p,q) \quad \forall p, q \in E$$
e abbiamo visto che
$$f \text{ isometria affine di } (E,d) \iff \vec{f} \text{ isometria lineare di } (\vec{E}, b)$$
ovvero se e solo se $\vec{f} \in \mathrm{O}(\vec{E}, b)$.

Nel caso dello spazio euclideo numerico standard $\mathbb{E}^n$, otteniamo che un'applicazione affine $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, che si scriva come $f(x) = Ax + b$, soddisfa
$$f \text{ isometria affine di } \mathbb{E}^n \iff \vec{f} = A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$$

(e) Fissiamo uno spazio affine E. Abbiamo visto che la mappa
$$\begin{aligned} \mathcal{L}:\ \mathrm{End}_{aff}(E) &\longrightarrow \mathrm{End}(\vec{E}) \\ f &\longmapsto \vec{f} \end{aligned}$$
che associa ad un'applicazione affine $f : E \to E$ la sua giacitura $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ rispetta la composizione: $\mathcal{L}(g \circ f) = \mathcal{L}(g) \circ \mathcal{L}(f)$, ossia
$$\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$$
Ne segue che
$$\overrightarrow{\left(f^k\right)} = \left(\vec{f}\right)^k$$
Esempio. Se prendiamo $E = \mathbb{R}^n$ lo spazio affine numerico, allora f e g si scriveranno come $f(x) = Ax + b$ e $g(y) = Cy + d$, per opportune matrici A, C quadrate $n \times n$ e opportuni vettori $b, d \in \mathbb{R}^n$. Calcolando $g \circ f$ otteniamo
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(Ax + b) = C(Ax + b) + d = (CA)x + (Cb + d)$$
e dunque
$$\overrightarrow{g \circ f} = CA = \vec{g} \circ \vec{f}$$
in quanto $C = \vec{g}$ e $A = \vec{f}$.

Se stiamo cercando di determinare, quindi, le affinità f di $\mathbb{R}^n$ (che si scriva come $f(x) = Ax + b$) tali che $f^k = I$ (per un certo intero $k \neq 0$), necessariamente dovrà aversi

$$A^k = \vec{f}^k = I$$

Chiaramente, tutti gli autovalori λ di una matrice A che soddisfi $A^k = I$ per qualche $k > 0$, devono soddisfare $\lambda^k = 1$. Infatti, se v è un autovettore di autovalore λ, allora

$$v = Iv = A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda(A^{k-1}v) = \cdots = \lambda^k v$$

e dunque $\lambda^k = 1$.
Nel caso $A^{-k} = I$, la matrice A^{-1} ha autovalore λ^{-1} (con autovettore lo stesso v) e soddisfa $(A^{-1})^k = I$, dunque nuovamente avremo $\lambda^{-k} = (\lambda^{-1})^k = 1$.
Notiamo per inciso che questo argomento funziona anche per le matrici a coefficienti complessi (e in effetti su qualunque campo). Dunque,

tutti gli autovalori λ di una matrice A tale che $A^k = I$ (per qualche $k \neq 0$) soddisfano necessariamente $\lambda^k = 1$.

Esempio 1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha evidentemente autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. Poiché $1 = \lambda_1^k = 2^k \implies k = 0$, ne segue che $A^k = I \implies k = 0$. In altre parole, $A^k \neq I$ per ogni intero $k \neq 0$.
Esempio 2. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p_C(t) = t^2 + 9$ e quindi autovalori complessi $\lambda = \pm 3i$. Chiaramente, $(\pm 3i)^k = 1 \implies k = 0$ e dunque anche in questo caso $C^k \neq I$ per ogni intero $k \neq 0$.
Controesempio. Una matrice M può avere tutti gli autovalori λ che soddisfino $\lambda^k = 1$ e tuttavia può succedere che $M^k \neq I$. Per esempio

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso l'unico autovalore di M è 1, e tuttavia

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque $M^k \neq I$ per ogni intero $k \neq 0$.