Geometria I, a.a. 2013-14

Soluzioni della prova scritta

16 Gennaio 2014

Esercizio 1. Determinate per quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$ è la topologia discreta e motivate la risposta.

(a) $X := \big\{\{(n^2+1)/n\} \mid n \in \mathbb{N}_+\big\}$.

(b) Y è il sottoinsieme dei reali che, in base decimale, hanno solo 0 e 1 dopo la virgola (per esempio $5,12$ è in Y, come anche $-13,10100100010000\ldots$, ma non $1,5$).

(c) $Z := \big\{(m^2+1)/m \mid m \in \mathbb{N}_+\big\}$.

(Ricordiamo che la **parte frazionaria** *di $x \in \mathbb{R}$ è l'unico $\{x\} \in [0,1)$ tale che $(x - \{x\}) \in \mathbb{N}$, in altre parole $\{x\} = (x - [x])$ dove $[x]$ è la parte intera di x.)*

(Ri)Soluzione:

1. X *non* ha la topologia discreta.
2. Y *non* ha la topologia discreta.
3. Z ha la topologia discreta.

(1): Siccome

$$\{(n^2+1)/n\} = \{(n+1/n)\} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1, \\ 1/n & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

si ha che $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \geq 2\}$. Se X ha la topologia discreta allora $\{0\}$ è aperto in X, ma se $A \subset X$ è aperto e $0 \in A$ allora esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$B(0,\epsilon) \cap X \subset A.$$

Ma $1/n \in B(0,\epsilon) \cap X$ per ogni $n > 1/\epsilon$, quindi A non contiene solo 0.
(2): Sia

$$a := 1/9 = 0.1111\ldots$$

Ovviamente $a \in Y$. Perchè Y abbia la topologia discreta $\{a\}$ deve essere aperto in Y, e quindi deve esistere $\epsilon > 0$ tale che $B(a,\epsilon) \cap Y = \{a\}$. Questo è impossibile perchè, ponendo

$$b_n := 0.\underbrace{1\ldots1}_{n}$$

si ha che $b_n \in Y$ e $b_n \to a$ per $n \to \infty$.
(3): La differenza tra termini successivi della successione $\{(m^2+1)/m\}_{m \in \mathbb{N}_+}$ è data da

$$(n+1) + \frac{1}{n+1} - (n + \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ne segue che se $a, b \in \mathbb{N}_+$ sono diversi allora

$$\left| \frac{a^2+1}{a} - \frac{b^2+1}{b} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi $B((m^2+1)/m, 1/2) \cap Z = \{(m^2+1)/m\}$, e perciò $\{(m^2+1)/m\}$ è aperto in Z. Questo dimostra che Z ha la topologia discreta.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_{\text{sfry}}$ la retta di Sorgenfrey, cioè $\mathbb{R}$ munito della topologia (di Sorgenfrey) che ha come base $\mathcal{B} = \{[a,b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$. Per $c \in \mathbb{R}$ sia

$$\begin{array}{cccc} \varphi_c : & \mathbb{R}_{\text{sfry}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\text{sfry}} \\ & x & \mapsto & c \cdot x \end{array}$$

Determinate per quali $c \in \mathbb{R}$ l'applicazione φ_c è continua, e *motivate* la risposta.

(Ri)Soluzione: φ_c è continua se e solo se $c \geq 0$.
(1): Supponiamo che $c \geq 0$. Siccome $\mathcal{B}$ è una base per la topologia di Sorgenfrey è sufficiente dimostrare che per $a < b \in \mathbb{R}$ si ha che $\varphi_c^{-1}([a,b))$ è aperto in $\mathbb{R}_{\text{sfry}}$. Se $c > 0$ allora

$$\varphi_c^{-1}([a,b)) = [a/c, b/c)$$

che è evidentemente aperto. Per $c = 0$ abbiamo

$$\varphi_0^{-1} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } a \leq 0, \\ \emptyset & \text{se } 0 < a. \end{cases}$$

In entrambi i casi φ_0^{-1} è aperto.
(2): Supponiamo che $c < 0$. Allora

$$\varphi_c^{-1}([0,-c)) = (-1,0]$$

e quindi è sufficiente dimostrare che $(-1,0]$ non è aperto in $\mathbb{R}_{\text{sfry}}$. Supponiamo che $(-1,0]$ sia aperto. Siccome $0 \in (-1,0]$ e $\mathcal{B}$ è una base per la topologia di Sorgenfrey esistono $a < b \in \mathbb{R}$ tali che $0 \in [a,b) \subset (-1,0]$. Allora $a \leq 0$ e $0 < b$ perchè $0 \in [a,b)$ e questo contraddice $[a,b) \subset (-1,0]$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}_{\text{scs}}$ l'insieme dei numeri reali, munito della topologia della semicontinuità superiore (un sottoinsieme è aperto se è uguale a $(-\infty, a)$ per un qualche $a \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$). Dimostrate che un sottoinsieme non vuoto $K \subseteq \mathbb{R}_{\text{scs}}$ (con la topologia indotta) è compatto se e solo se $s = \sup(K) < +\infty$ e $s \in K$.

(Ri)Soluzione: (1). Supponiamo che $s < +\infty$ e $s \in K$. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di K. Siccome la topologia di K è quella indotta, per ogni $i \in I$ esiste $a_i \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ tale che $U_i = K \cap (-\infty, a_i)$. Siccome $s \in K$ esiste $i_0 \in I$ tale che $s < a_{i_0}$. Ma allora $K \subset (-\infty, a_{i_0})$ e quindi $\{U_{i_0} \cap K\}$ è un ricoprimento di K.
(2). Supponiamo che K sia compatto. Dimostriamo che $s \in \mathbb{R}$. Se $s = +\infty$ allora il ricoprimento aperto di K dato da

$$\{(-\infty, n) \cap K\}_{n \in \mathbb{N}}$$

non ha un sottoricoprimento finito, contraddizione. Ora dimostriamo che $s \in K$. Se $s \notin K$ allora il ricoprimento aperto di K dato da

$$\{(-\infty, s - 1/n) \cap K\}_{n \in \mathbb{N}_+}$$

non ha un sottoricoprimento finito, contraddizione.

Esercizio 4. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$) definito da

$$X := \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) \mid y \geq 0\}.$$

Dimostrate che X *non* è omeomorfo a $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea).

(Ri)Soluzione: Supponiamo che $f\colon X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ sia un omeomorfismo. La restrizione di f a $(X \setminus \{(0,0)\})$ è un omeomorfismo

$$g\colon (X \setminus \{(0,0)\}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R} \setminus \{f(0,0)\}).$$

Notate che $(X \setminus \{(0,0)\})$ ha 3 componenti connesse, sono

$$\{(x,0) \mid x < 0\}, \quad \{(x,0) \mid x > 0\}, \quad \{(0,y) \mid y > 0\}.$$

Siccome g è un omeomorfismo ne segue che le componenti connesse di $(\mathbb{R} \setminus \{f(0,0)\})$ sono 3, date da

$$g(\{(x,0) \mid x < 0\}), \quad g(\{(x,0) \mid x > 0\}), \quad g(\{(0,y) \mid y > 0\}).$$

Questo è assurdo, le componenti connesse di $(\mathbb{R} \setminus \{f(0,0)\})$ sono 2, date da

$$(-\infty, f(0,0)), \qquad (f(0,0), +\infty).$$

Esercizio 5. Dato $\vartheta \in \mathbb{R}$, sia G_ϑ il gruppo delle rotazioni di S^1 di angolo un multiplo *intero* di θ e sia $\overset{\vartheta}{\sim}$ la relazione di equivalenza su S^1 definita ponendo

$$x \overset{\vartheta}{\sim} y \text{ se esiste } g \in G_\vartheta \text{ tale che } x = g(y).$$

Dimostrate che se $\vartheta/2\pi \in \mathbb{Q}$ allora $S^1/\overset{\vartheta}{\sim}$ è omeomorfo a S^1.

(Ri)Soluzione: Sia $U \subset \mathbb{C}^*$ il sottogruppo (moltiplicativo) dei numeri complessi di norma 1. Abbiamo l'identificazione standard

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & U \\ (\cos\alpha, \sin\alpha) & \mapsto & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \end{array}$$

La rotazione di angolo θ è identificata con la moltiplicazione

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ z & \mapsto & e^{i\theta}z \end{array}$$

Scriviamo $\vartheta = 2\pi a/b$ con $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}_+$. Allora $(e^{i\vartheta})^b = 1$ e quindi $e^{i\vartheta}$ è una radice dell'unità. Sia $n \in \mathbb{N}_+$ l'*ordine* di $e^{i\vartheta}$ come elemento di U, cioè il minimo $n \in \mathbb{N}_+$ tale che $(e^{i\vartheta})^n = 1$ (quindi $G_\vartheta \cong \mathbb{Z}/(n)$). Allora l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$$

è continua e costante sulle classi di $\overset{\vartheta}{\sim}$-equivalenza. Quindi f induce un'applicazione continua

$$g\colon (U/\overset{\vartheta}{\sim}) \longrightarrow U.$$

Si verifica facilmente che g è biunivoca. Siccome $(U/\overset{\vartheta}{\sim})$ è compatto (perchè l'applicazione quoziente $U \to (U/\overset{\vartheta}{\sim})$ è continua e U è compatto) e U è di Hausdorff (in quanto sottospazio di uno spazio di Hausdorff), ne segue che g è un omeomorfismo.