Geometria I, a.a. 2013-14

Soluzioni della prova scritta

25 settembre 2014

Esercizio 1. Siano $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ rette proiettive di equazioni

$$\begin{aligned} \ell_1 &: 2X_0 - X_1 + X_2 = 0 \\ \ell_2 &: 5X_0 - aX_2 = 0 \\ \ell_3 &: 3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \end{aligned}$$

Determinate per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ le tre rette sono concorrenti.
Per ciascun valore trovato del parametro a, calcolare il punto di intersezione delle tre rette.

Risoluzione:
Per dualità, le rette ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 hanno un punto in comune se e solo se i vettori $(2, -1, 1)$, $(5, 0, -a)$, $(3, 1, -2)$ di $(\mathbb{C}^2)^*$ sono linearmente dipendenti, ossia se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

il che si verifica se e solo se $\boxed{a = 1}$.
Per tale valore $a = 1$, l'intersezione delle tre rette è data da

$$\begin{cases} 5X_0 - X_2 = 0 \\ 2X_0 - X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto $\boxed{P = [1 : 7 : 5]}$.

Esercizio 2. Siano $[X_0 : X_1 : X_2]$ le coordinate omogenee standard su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e sia $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]_2)$ lo spazio delle coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
Dimostrare che il luogo $S \subset \mathbb{P}$ delle coniche singolari è il supporto di una ipersuperficie.
Si determini inoltre il grado di tale ipersuperficie e si dica se è singolare.

Risoluzione:
Scrivendo una conica F su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ come $F = a_{00}X_0^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2$ dotiamo $\mathbb{P}$ di coordinate omogenee $[a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}]$.
Tale conica F è singolare se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se $a_{00}a_{11}a_{22} - a_{00}a_{12}^2 - a_{01}^2 a_{22} + a_{01}a_{12}a_{02} + a_{02}a_{01}a_{12} - a_{02}^2 a_{11} = 0$.
Dunque, S è il supporto dell'ipersuperficie $[\mathcal{G}]$, dove $\boxed{\mathcal{G} = a_{00}a_{11}a_{22} - a_{00}a_{12}^2 - a_{01}^2 a_{22} + 2a_{01}a_{12}a_{02} - a_{02}^2 a_{11}}$, che ha quindi $\boxed{\text{grado } 3}$.

Per vedere se $[\mathcal{G}]$ è singolare, deriviamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{00}} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\
\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{01}} &= -2a_{01}a_{22} + 2a_{12}a_{02} \\
\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{02}} &= 2a_{01}a_{12} - 2a_{02}a_{11} \\
\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{11}} &= a_{00}a_{22} - a_{02}^2 \\
\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{12}} &= -2a_{00}a_{12} + 2a_{01}a_{02} \\
\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{22}} &= a_{00}a_{11} - a_{01}^2
\end{aligned}$$

e vediamo che tutte le derivate si annullano nel punto $[F] \in S$ che rappresenta la conica $F = X_0^2$: dunque $[F]$ è un punto singolare di $[\mathcal{G}]$. Concludiamo che $\boxed{[\mathcal{G}] \text{ è singolare}}$.

Esercizio 3. Sia $[F]$ una curva in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Dimostrare che, se $[F]$ è non singolare, allora $[F]$ è irriducibile.
È vero il viceversa? *(Dimostrare o dare un controesempio.)*

Risoluzione:
Supponiamo $[F]$ riducibile. Vogliamo mostrare che $[F]$ è singolare.
Dato che $[F]$ è riducibile, potremo scrivere $F = G \cdot H$, dove $[G], [H]$ sono due curve in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Per il teorema di Bézout, esiste un punto $P \in \operatorname{supp}([G]) \cap \operatorname{supp}([H])$.
Abbiamo visto in classe che la molteplicità di $[F]$ nel punto P è data da

$$\operatorname{mult}_P([F]) = \operatorname{mult}_P([G]) + \operatorname{mult}_P([H]) \geq 1 + 1 = 2$$

e quindi P è un punto singolare di $[F]$.

$\boxed{\text{Il viceversa non è vero.}}$
Infatti, si verifica facilmente che la curva $F = X_0X_2^2 - X_1^3$ è singolare nel punto $[1 : 0 : 0]$ ma è irriducibile.

Esercizio 4. Siano $[0, 1]$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ muniti della topologia euclidea usuale.
Data un'applicazione continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, si definiscano

$$\begin{aligned}
S_f &:= \left\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq y \leq 100\right\} \subset \mathbb{R}^2 \\
R_f &:= \left\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq y\right\} \subset \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Determinare se R_f e S_f siano necessariamente connessi e/o compatti.

Risoluzione:
Poiché f è continua, S_f è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$, dunque $\boxed{S_f \text{ è sempre compatto}}$. D'altra parte, prendendo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 300x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 300(1-x) & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

si vede che $f(0) = f(1) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) = 150$, dunque $S_f = U \sqcup V$, dove $U = S_f \cap \{x < \frac{1}{2}\}$ e $V = S_f \cap \{x > \frac{1}{2}\}$. Concludiamo che $\boxed{S_f \text{ può essere sconnesso}}$.

Notiamo che R_f non è limitato, dunque $\boxed{R_f \text{ non è mai compatto}}$. D'altra parte, vogliamo dimostrare che $\boxed{R_f \text{ è sempre connesso per archi}}$. Essendo f continua e $[0,1]$ compatto, essa ammette valore massimo M. Siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R_f$. Li connettiamo con il cammino $\gamma : [0,1] \to R_f$ definito come

$$\gamma(t) := \begin{cases} (x_1, y_1 + 3t(M + 1 - y_1)) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ (x_1 + (3t - 1)(x_2 - x_1), M + 1) & \text{per } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (x_1, M + 1 - (3t - 2)(M + 1 - y_2) & \text{per } t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea e sia G il gruppo $G := \{\phi_k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, dove $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definito come $\phi_k(x) = 2^k x$.

(a) Dire se il quoziente $X := \mathbb{R}/G$ di $\mathbb{R}$ per l'azione del gruppo G sia di Hausdorff e se sia compatto.

(b) Dire se $Y := X \setminus \{[0]\}$ sia compatto.

Risoluzione:

(a) Notiamo che ogni classe di equivalenza interseca il segmento $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$, dunque la restrizione $\pi|_{[-1,1]}$: $[-1, 1] \to X$ della proiezione canonica $\pi : \mathbb{R} \to X = \mathbb{R}/G$ è continua e suriettiva. Poiché $[-1, 1]$ è compatto, concludiamo che $\boxed{X \text{ è compatto}}$.

D'altra parte, $\boxed{X \text{ non è di Hausdorff}}$. Infatti $[0]$ e $[1]$ sono punti distinti di X. Siano $U, V \subset X$ aperti tali che $[0] \in U$ e $[1] \in V$. Allora $\tilde{U} := \pi^{-1}(U)$ e $\tilde{V} := \pi^{-1}(V)$ sono aperti saturi di $\mathbb{R}$ con $0 \in \tilde{U}$ e $1\tilde{V}$. Essendo $\tilde{U}$ aperto, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \tilde{U}$. Essendo $\tilde{V}$ saturo, tutti gli elementi del tipo $2^k \cdot 1 = 2^k$ appartengono a $\tilde{V}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Dunque, esiste un $k \in \mathbb{Z}$ molto negativo tale che $2^{-k} \in \tilde{V} \cap \tilde{U}$, il che mostra che $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq$ e perciò $U \cap V \neq \emptyset$.

(b) È facile vedere che il sottoinsieme $Z = [-2, -1] \cup [1, 2]$ interseca tutte le classi di equivalenza per l'azione di G ad eccezione di $\{0\}$. Ciò vuol dire che la restrizione $\pi|_Z^Y : Z \to Y$ della proiezione canonica $\pi : \mathbb{R} \to X$ è continua e suriettiva. Poiché Z è compatto, concludiamo che $\boxed{Y \text{ è compatto}}$.