Geometria I, a.a. 2013-14
Soluzioni della prova scritta

24 Luglio 2014

Esercizio 1. Siano $p_1, \ldots, p_4 \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ dati da

$$p_1 = [1, 0], \quad p_2 = [1, 1], \quad p_3 = [1, 2], \quad p_4 = [0, 1],$$

e $q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ dati da

$$q_1(t) = [1, 1], \quad q_2(t) = [2t, 1], \quad q_3(t) = [1, 2], \quad q_4(t) = [2, t].$$

Determinate per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una proiettivià $\varphi \colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che

$$\varphi(p_i) = q_i(t) \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

(Ri)soluzione: Siccome

$$\beta(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1/2 \notin \{0, 1, \infty\}$$

una tale φ esiste se e solo se

$$\frac{1}{2} = \beta(p_1, p_2, p_3, p_4) = \beta(q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t)) = \frac{4t^2 - 9t + 2}{2t^2 - 2},$$

ovvero

$$t^2 - 3t + 1 = 0. \tag{1}$$

Risolvendo (1) troviamo che $t = (3 \pm \sqrt{5})/2$.

Esercizio 2. Diciamo che una proiettività $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ preserva la retta proiettiva $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ se $F(L) = L$. Determinare per quali $m \geq 0$ esiste una proiettività $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che preservi esattamente m rette distinte di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. (L'esercizio sarà completo solo se per ogni m per cui esiste una proiettività che preservi esattamente m rette se ne darà un *esempio*.)

Risoluzione: Una tale proiettività esiste se e solo se $1 \leq m \leq 3$. Per dimostrarlo notiamo innanzitutto che F preserva esattamente m rette distinte se e solo se la proiettività duale $F^\vee : (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^\vee \to (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^\vee$ fissa m punti distinti, e quindi esiste una tale F se e solo se siste una proiettività $G \colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che fissa esattamente m punti distinti. Ora siano

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Come si verifica facilmente le proiettività $\mathbb{P}(L_A)$, $\mathbb{P}(L_B)$ e $\mathbb{P}(L_C)$ hanno rispettivamente 1, 2 e 3 punti fissi. Ora dimostriamo che il numero dei punti fissi di una proiettività $\mathbb{P}(f)$, se è finito, è compreso tra 1 e 3. Ogni punto fisso di $\mathbb{P}(f)$ è un autospazio di f di dimensione 1, e quindi abbiamo un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \{[v] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid f([v]) = [v]\} & \longrightarrow & \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ autovalore di } f\} \\ [v] & \mapsto & \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(v) = \lambda v \end{array} \tag{2}$$

Il polinomio caratteristico $P_f \in \mathbb{R}[\lambda]$ ha grado 3 e perciò il numero degli autovalori di f è compreso tra 1 e 3 (nota: 3 è dispari!), quindi sarà sufficiente dimostrare che (2) è biunivoca. È chiaro che (2) è suriettiva, rimane da dimostrare che è iniettiva. Se la (2) *non* è iniettiva esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti tali che $f(v_i) = \lambda v_i$ per $i = 1, 2$, quindi ogni punto della retta generata da $[v_1]$ e $[v_2]$ è fisso per f, e questo contraddice l'ipotesi che $\mathbb{P}(f)$ abbia un numero finito di punti fissi.

Esercizio 3. Si determinino le coniche $[f]$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (dove $f \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$) passanti per i punti

$$[1,0,0], \quad [0,1,0], \quad [0,0,1], \quad [1,1,1]$$

e tangenti alla retta $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana

$$X_0 + 2X_1 - X_2 = 0.$$

(Ri)soluzione: Le coniche cercate sono

$$[(X_0 - X_2)X_1], \qquad [9X_0X_1 - 8X_0X_2 - X_1X_2]. \tag{3}$$

Infatti con un rapido conto si verifica che una conica $[f]$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ contiene $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ e $[1,1,1]$ se solo se esiste $(0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$f = aX_0X_1 + bX_0X_2 - (a+b)X_1X_2.$$

La conica $[f]$ è tangente a L se e solo se esiste un solo punto di intersezione tra il supporto di $[f]$ e L, ovvero se esiste un solo $[X_0, X_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che

$$0 = aX_0X_1 + bX_0(X_0 + 2X_1) - (a+b)X_1(X_0 + 2X_1).$$

Semplificando vediamo che dobbiamo stabilire per quali (a,b) esiste un solo $[X_0, X_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che

$$0 = bX_0^2 + bX_0X_1 - 2(a+b)X_1^2.$$

Il discriminante è

$$\Delta = b(8a + 9b)$$

e quindi otteniamo (a meno di moltiplicazione per uno scalare non-nullo) $(a,b) = (1,0)$ o $(a,b) = (9,-8)$, e questi valori corrispondono alle coniche (3).

Esercizio 4. Siano X e Y due spazi topologici e sia $\mathcal{Z} = \{Z_i \subset X \mid i \in I\}$ un ricoprimento di X. Sia inoltre $f : X \to Y$ un'applicazione tale che la restrizione $f|_{Z_i} : Z_i \to Y$ di f a Z_i sia continua per ogni $i \in I$.

Dimostrare le seguenti affermazioni oppure dare un controesempio.

(a) f è continua.

(b) Se tutti gli Z_i sono aperti, allora f è continua.

(c) Se tutti gli Z_i sono chiusi, allora f è continua.

(Ri)soluzione:

(a) Non è vera, basta che X, Y siano spazi per cui esiste una $f\colon X \to Y$ che *non* è continua e $\mathcal{Z} = \{Z_i \subset X \mid i \in I\}$ il ricoprimento di X formato dai "singleton" (ogni applicazione con dominio un singleton è continua).

(b) È vera. Infatti sia $U \subset Y$ aperto: dobbiamo dimostrare che $f^{-1}U$ è aperto. Sia $i \in I$: allora $(f|_{Z_i})^{-1}(U)$ è un aperto di Z_i perchè $f|_{Z_i}\colon Z_i \to Y$ è continua, e siccome Z_i è aperto in X segue che $(f|_{Z_i})^{-1}(U)$ è un aperto di X. Siccome $\mathcal{Z}$ è un ricoprimento di X abbiamo

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} (f|_{Z_i})^{-1}(U)$$

e quindi $f^{-1}(U)$ è aperto in quanto unione di aperti.

(c) Non è vera, basta considerare una $f\colon X = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non* continua e $\mathcal{Z} = \{Z_i \subset X \mid i \in I\}$ il ricoprimento di $X = \mathbb{R}$ formato dai "singleton".

Esercizio 5. Dato un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^2$, denotiamo con $\mathbb{R}^2/S$ lo spazio topologico ottenuto quozientando lo spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ per la relazione di equivalenza che dichiara $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in S$.
Dire se i seguenti spazi topologici X, Y siano di Hausdorff e se soddisfino il primo assioma di numerabilità (cioè se ogni loro punto abbia un sistema fondamentale di intorni numerabile).
Giustificare la risposta.

(a) $X = \mathbb{R}^2/L$ con $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

(b) $Y = \mathbb{R}^2/D$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(Ri)soluzione: Siano $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to X$ e $\rho \colon \mathbb{R}^2 \to Y$ le applicazioni quoziente. Siano $p_0 \in X$ e $q_0 \in Y$ le classi di equivalenza L e D rispettivamente.

(a1) X è di Hausdorff. Infatti sia $[(x_1, y_1)] =: p_1 \neq p_0$. Esistono aperti *disgiunti* $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ tali che $(x_1, y_1) \in \widetilde{U}$ e $L \subset \widetilde{V}$, per esempio

$$\widetilde{U} := B_{|x_1|/4}(x_1, y_1), \qquad \widetilde{V} := (-|x_1|/4, |x_1|/4) \times \mathbb{R}.$$

Allora $U := \pi(\widetilde{U})$ e $V := \pi(\widetilde{V})$ sono aperti disgiunti di X perché $\pi^{-1}(U) = \widetilde{U}$ e $\pi^{-1}(V) = \widetilde{V}$, e chiaramente $p_1 \in U$ e $p_0 \in V$.

Se $[(x_1, y_1)] =: p_1 \neq p_0 \neq p_2 := [(x_2, y_2)]$ sono due punti distinti di X, esistono certamente $\tilde{U}'$ e $\tilde{V}'$ aperti disgiunti di $\mathbb{R}^2$ che contengano rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Allora $\tilde{U} := \tilde{U}' \setminus L$ e $\tilde{V} := \tilde{V}' \setminus L$ sono aperti disgiunti di $\mathbb{R}^2$ che separano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e $U := \pi(\tilde{U})$ e $V := \pi(\tilde{V})$ sono aperti disgiunti di X che separano p_1 e p_2.

(a2) X non soddisfa il primo assioma di numerabilità perchè p_0 *non* ha un sistema fondamentale di intorni numerabile. Infatti supponiamo che $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia un sistema fondamentale di intorni di p_0. Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\widetilde{U}_n := \pi^{-1}(U_n)$. Dunque $\widetilde{U}_n$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente L e quindi esiste $\epsilon_n > 0$ tale che

$$(-\epsilon_n, \epsilon_n) \times (n - \epsilon_n, n + \epsilon_n) \subset \widetilde{U}_n.$$

Siano $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset X$ definiti da

$$\widetilde{V} := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(\epsilon_n/4, n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}, \qquad V := \pi(\widetilde{V}).$$

Allora V è un aperto di X contenete p_0 perchè $\widetilde{V}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente L e $\pi^{-1}(V) = \widetilde{V}$. Siccome $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di p_0, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $U_{n_0} \subset V$ e quindi

$$\widetilde{U}_{n_0} = \pi^{-1}(U_{n_0}) \subset \pi^{-1}(V) = \widetilde{V}.$$

Questo è assurdo perchè (per esempio) $(\epsilon_{n_0}/4, n_0) \in \widetilde{U}_{n_0}$ ma $(\epsilon_{n_0}/4, n_0) \notin \widetilde{V}$.

(b1) Il singleton $\{q_0\}$ non è chiuso in Y (perché $\rho^{-1}(q_0) = D$ non è chiuso in $\mathbb{R}^2$) e quindi Y *non* è di Hausdorff.

(b2) Y soddisfa il primo assioma di numerabilità. Infatti, un sistema fondamentale di intorni di q_0 è dato da $\{U_0\}$, dove $U_0 = \{q_0\}$ è aperto in Y. Sia ora $q_1 = [(x_1, y_1)] \in Y$ con $q_1 \neq q_0$. Se $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 1$, allora $\left\{\tilde{U}_n := B_{1/n}(x_1, y_1) \mid 1/n < r - 1,\ n \in \mathbb{N}_+\right\}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile per (x_1, y_1) disgiunto da D, e quindi $\left\{U_n := \rho(\tilde{U}_n) \mid 1/n > r - 1\right\}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile per q_1. Se infine $r = 1$, allora $(x_1, y_1) \in \overline{D}$ e dunque $q_1 \in \overline{\{q_0\}}$. Quindi ogni aperto V di Y che contenga q_1 deve necessariamente contenere q_0; in particolare, $\rho^{-1}(V)$ deve contenere D. Poiché ogni aperto di X che contenga (x_1, y_1) e D contiene un $\tilde{V}_n := B_{1/n}(x_1, y_1) \cup D$ per qualche n sufficientemente grande, ne segue che $\{V_n := \rho(B_{1/n}(x_1, y_1) \cup D) \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile per q_1.