Geometria I, a.a. 2013-14

Soluzioni della prova scritta

3 Luglio 2014

Esercizio 1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si considerino i punti $P = [1, -2, 1]$, $Q = [1, 2, 2]$, $R_t = [t, 1, -1]$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
Dire per quali valori del parametro t i punti P, Q, R_t sono allineati e, in tal caso, calcolare l'equazione della retta che li contiene.

(Ri)soluzione: I punti P, Q, R_t sono allineati se e solo se è nullo il determinante della matrice che ha per righe le loro entrate, cioè se

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ t & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcolando si trova che P, Q, R_t sono allineati se e solo se $t = -5/6$, cioè se $R_t = [5, -6, 6]$. Una equazione cartesiana della retta che contiene P, Q e $[5, -6, 6]$ è

$$6X_0 + X_1 - 4X_2 = 0.$$

Esercizio 2. Determinare per quali $m \geq 0$ esiste una proiettività $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che fissi esattamente m punti di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. (L'esercizio sarà completo solo se per ogni m per cui esiste una proiettività che fissa esattamente m punti se ne darà un *esempio*.)

Risoluzione: Una tale proiettività esiste per $1 \leq m \leq 3$. Infatti siano

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Come si verifica facilmente le proiettività $\mathbb{P}(L_A)$, $\mathbb{P}(L_B)$ e $\mathbb{P}(L_C)$ hanno rispettivamente 1, 2 e 3 punti fissi. Ora dimostriamo che il numero dei punti fissi di una proiettività $\mathbb{P}(f)$, se è finito, è compreso tra 1 e 3. Ogni punto fisso di $\mathbb{P}(f)$ è un autospazio di f di dimensione 1, e quindi abbiamo un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \{[v] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid f([v]) = [v]\} & \longrightarrow & \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \ \lambda \text{ autovalore di } f\} \\ [v] & \mapsto & \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(v) = \lambda v \end{array} \tag{1}$$

Il polinomio caratteristico $P_f \in \mathbb{R}[\lambda]$ ha grado 3 e perciò il numero degli autovalori di f è compreso tra 1 e 3 (nota: 3 è dispari!), quindi sarà sufficiente dimostrare che (1) è biunivoca. È chiaro che (1) è suriettiva, rimane da dimostrare che è iniettiva. Se la (1) *non* è iniettiva esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti tali che $f(v_i) = \lambda v_i$ per $i = 1, 2$, quindi ogni punto della retta generata da $[v_1]$ e $[v_2]$ è fisso per f, e questo contraddice l'ipotesi che $\mathbb{P}(f)$ abbia un numero finito di punti fissi.

Esercizio 3. Siano $f, g \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$ dati da

$$f := 5X_0^2 + 4X_0X_2 + X_1^2 + X_2^2, \qquad g := X_0^2 + 4X_0X_2 + 2X_1^2 + 2X_2^2.$$

1. Siano $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f), \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(g) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i sottoinsiemi di equazioni cartesiane $f = 0$ e $g = 0$ rispettivamente. Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(g)$?
2. Siano $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(f), \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(g) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ i sottoinsiemi di equazioni cartesiane $f = 0$ e $g = 0$ rispettivamente. Esiste una proiettività ψ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\psi(\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(g)$?

(Ri)soluzione: Le forme quadratiche reali definite da f e g sono non-degeneri, di segnatura rispettivamente 3 e 1. Quindi f è definita positiva e perciò $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f)$ è vuoto, mentre $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(g)$ è una conica non-vuota: segue che *non* esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(g)$. D'altra parte siccome le forme quadratiche complesse definite da f e g sono non-degeneri esiste una proiettività ψ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\psi(\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(g)$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e sia p un numero primo. Definiamo $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ come $d_p(x, y) := |x - y|_p$ dove

$$|z|_p := \begin{cases} 0 & \text{se } z = 0 \\ p^{-d} & \text{se } z = \frac{a}{b}p^d \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ primi con } p \end{cases}$$

(a) Dimostrare che d_p definisce una distanza su $\mathbb{Q}$.

(b) Dimostrare che esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ convergente per la topologia euclidea ma non convergente per la topologia indotta da d_p.

(c) Dimostrare che esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ convergente per la topologia indotta da d_p ma non convergente per la topologia euclidea.

(I punti (b) e (c) dimostrano che la topologia metrica indotta da d_p *non* è confrontabile con la topologia euclidea.)

(Ri)soluzione: (a): È chiaro che $d_p(x, y) \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $x = y$, ed è anche chiaro che $d_p(x, y) = d_p(y, x)$. Rimane da dimostrare che vale la diseguaglianza triangolare per d_p, ovvero che

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Se $x = 0$ oppure $y = 0$ la (2) è ovviamente vera, quindi possiamo supporre che $x \neq 0 \neq y$, e quindi possiamo scrivere

$$x = \frac{a}{b}p^s, \quad y = \frac{c}{d}p^t, \qquad 1 = (a, p) = (b, p) = (c, p) = (d, p).$$

A meno di scambiare i ruoli di x e y, possiamo supporre $s \leq t$. Dunque

$$x + y = p^s\left(\frac{a}{b} + p^{t-s}\frac{c}{d}\right) = \frac{p^{t-s}a + c}{bc}p^s = \frac{e}{f}p^r, \quad (e, p) = (f, p) = 1$$

Da cui risulta che $r \geq s$ e quindi

$$|x + y|_p = p^{-r} \leq p^{-s} < |x|_p + |y|_p.$$

(b): Consideriamo la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $a_n := p^{-n}$.
Essa converge a 0 nella topologia euclidea ma *non* è convergente nella topologia indotta da d_p (per esempio perché non è di Cauchy, dato che $d_p(a_{n-1}, a_n) = |p^{-n+1} - p^{-n}|_p = |p^{-n}(p - 1)|_p = p^n > 1$).
(c): Consideriamo la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $b_n := p^n$.
Essa converge a 0 nella topologia indotta da d_p (poiché $d_p(0, b_n) = |p^n|_p = p^{-n} \to 0$), ma *non* è convergente nella topologia euclidea.

Esercizio 5. Si dimostri che S^1 (con la topologia euclidea) *non* è omeomorfo all'intervallo chiuso $[0, 1]$ con la topologia euclidea.

(Ri)soluzione: Se $f\colon [0, 1] \xrightarrow{\sim} S^1$ è un omeomorfismo allora la restrizione di f a $([0, 1]\backslash\{1/2\})$ è un omeomorfismo $([0, 1] \setminus \{1/2\}) \xrightarrow{\sim} (S^1 \setminus \{f(1/2)\})$ e quindi $([0, 1] \setminus \{1/2\})$ ha lo stesso numero di componenti connesse di $(S^1 \setminus \{f(1/2)\})$: questa è una contraddizione perchè $([0, 1] \setminus \{1/2\})$ ha due componenti connesse ma $(S^1 \setminus \{f(1/2)\})$ è connesso.