Geometria I, a.a. 2013-14

Soluzioni della prova scritta

25 Febbraio 2014

Esercizio 1. Siano $L_1, \ldots, L_4 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ le rette di equazioni cartesiane rispettive

$$X_0 + X_1 = 0, \quad X_0 + 2X_1 = 0, \quad X_0 - X_1 = 0, \quad X_0 - 2X_1 = 0,$$

e $M_1, \ldots, M_4 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ le rette di equazioni cartesiane rispettive

$$X_1 = 0, \quad X_1 + X_2 = 0, \quad X_1 + 2X_2 = 0, \quad X_1 + 3X_2 = 0.$$

Date una proiettività φ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(L_i) = M_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$, *oppure* dimostrate che una tale proiettivià non esiste.

(Ri)soluzione: Una tale proiettivià non esiste. Supponiamo che φ esista: arriveremo a una contraddizione. Cominciamo osservando che ciascuna retta L_i contiene il punto $[0, 0, 1]$, e che ciascuna retta M_i contiene il punto $[1, 0, 0]$. Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ i fasci delle rette contenenti $[0, 0, 1]$ e $[1, 0, 0]$ rispettivamente. Allora $\varphi(\mathcal{R}) = \mathcal{S}$: siccome le rette L_i sono distinite e così le R_i, segue che i birapporti $\beta(L_1, \ldots, L_4)$ e $\beta(M_1, \ldots, M_4)$ sono uguali. Coordinate omogenee per l'elemento di $\mathcal{R}$ di equazione cartesiana

$$a_0 X_0 + a_1 X_1 = 0$$

sono $[a_0, a_1]$ e, analogamente, coordinate omogenee per l'elemento di $\mathcal{S}$ di equazione cartesiana

$$b_1 X_1 + b_2 X_2 = 0$$

sono $[b_1, b_2]$. Quindi coordinate affini di $L_1, \ldots, L_4$ sono rispettivamente

$$1, \ 2, \ -1, \ -2,$$

e coordinate affini di $M_1, \ldots, M_4$ sono rispettivamente

$$0, \ 1, \ 2, \ 3.$$

Ricordiamo che il birapporto di punti $p_1, \ldots, p_4$ con coordinate *affini* $x_1, \ldots, x_4$ è dato da

$$\beta([1, x_1], [1, x_2], [1, x_3], [1, x_4]) = \frac{(x_1 - x_4) \cdot (x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3) \cdot (x_2 - x_4)}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \beta(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \frac{9}{8} \\ \beta(M_1, M_2, M_3, M_4) &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Siccome i birapporti sono diversi abbiamo una contraddizione.

Esercizio 2. Per $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ siano $L_{[\lambda,\mu]}, M_{[\lambda,\mu]} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le rette di equazioni cartesiane rispettivamente

$$(2\lambda - \mu)X_1 + \mu X_2 = 0, \qquad \lambda X_0 + \mu X_1 = 0.$$

Sia $D \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'insieme i cui punti sono le intersezioni $L_{[\lambda,\mu]} \cap M_{[\lambda,\mu]}$ al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$D := \bigcup_{[\lambda,\mu]} L_{[\lambda,\mu]} \cap M_{[\lambda,\mu]}.$$

Dimostrate che D è il supporto di una conica liscia.

Risoluzione: Il punto $[X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ appartiene a D se e solo se esiste una soluzione non banale del sistema di equazioni omogenee *in* λ *e* μ

$$\begin{aligned} 2X_1\lambda + (-X_1 + X_2)\mu &= 0 \\ 2X_0\lambda + X_1\mu &= 0 \end{aligned}$$

ovvero se

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2X_1 & -X_1 + X_2 \\ X_0 & X_1 \end{bmatrix} = X_0X_1 - X_0X_2 + 2X_1^2.$$

Quindi D è il supporto della curva $[F]$ dove

$$F := X_0X_1 - X_0X_2 + 2X_1^2.$$

Per stabilire se $[F]$ è una conica liscia calcoliamo le derivate parziali di F:

$$\frac{\partial F}{\partial X_0} = X_1 - X_2, \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = X_0 + 2X_1, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2} = -X_0.$$

Siccome non esistono punti $[X_0, X_1, X_2]$ in cui si annullino tutte le derivate parziali di F vediamo che D è una conica liscia.

Esercizio 3. Si considerino le curve $[f], [g], [h]$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ definite da

$$f(x,y) = y^2 - x, \qquad g(x,y) = y^2 - x^2, \qquad h(x,y) = y^2 - x^3$$

Dotiamo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ della topologia euclidea. Dire se

(a) $V(f)$ sia omeomorfo a $V(g)$;

(b) $V(g)$ sia omeomorfo a $V(h)$;

(c) $V(f)$ sia omeomorfo a $V(h)$;

dove $V(f), V(g), V(h) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ sono muniti della topologia di sottospazio.

(Ri)soluzione: Le applicazioni

$$\begin{array}{ccc} V(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V(h) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

sono omeomorfismi, in particolare $V(f)$ è omeomorfo a $V(h)$. D'altra parte $(0,0) \in V(g)$ e $(V(g) \setminus \{(0,0)\}$ ha quattro componenti connesse, date da

$$V(g) \cap \{(x,y) | x>0,\ x>0\}, \quad V(g) \cap \{(x,y) | x>0,\ y<0\}, \quad V(g) \cap \{(x,y) | x<0,\ y>0\}, \quad V(g) \cap \{(x,y) | x<0, \quad y<0\}.$$

Se esistesse un omeomorfismo tra $V(g)$ e $V(f)$ o tra $V(g)$ e $V(h)$ allora esisterebbe un omeomorfismo $\varphi \colon V(g) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ e ne seguirebbe che $(\mathbb{R} \setminus \{\varphi(0,0)\})$ ha quattro componenti connesse: questo è assurdo, il complementare di un punto in $\mathbb{R}$ ha *due* componenti connesse.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}_{scs}$ l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia della semicontinuità superiore (gli aperti sono i sottoinsiemi $(-\infty, a)$ per $a \in \{-\infty, +\infty\}$). Si dimostri che

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y < x^2\}$$

è denso nello spazio topologico prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{scs}$ (come di consueto $\mathbb{R}$ denota l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea).

(Ri)soluzione: Supponiamo che la chiusura $\overline{P}$ non sia $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: arriveremo a un assurdo. La famiglia degli intervalli aperti è una base della topologia euclidea, quindi la famiglia dei prodotti $\{(a, b)\times(-\infty, c)\}_{a,b,c\in\mathbb{R}}$ è una base della topologia di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{scs}$. Siccome $(\mathbb{R}^2\backslash\overline{P})$ è aperto non vuoto ne segue che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che

$$((a, b) \times (-\infty, c)) \cap \overline{P} = \emptyset.$$

Esistono $x_0 \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ e $y_0 \in \mathbb{Q}$ tale che $y_0 < x_0^2$ e $y_0 < c$. Ma allora $(x_0, y_0) \in ((a, b) \times (-\infty, c)) \cap P$, contraddizione.

Esercizio 5. Per $n \in \mathbb{Z}$ siano

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\mu_n} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^n \cdot x \end{array}$$

Osserviamo che $G := \{\mu_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo del gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ degli omeomorfismi di $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea).

(a) Dire se il quoziente $\mathbb{R}/G$ sia di Hausdorff.

(b) Dire se il quoziente $\mathbb{R}/G$ sia compatto.

(Ri)soluzione:

1. Il quoziente $\mathbb{R}/G$ *non è* di Hausdorff.
2. Il quoziente $\mathbb{R}/G$ *è* compatto.

I punti 0 e 1 non sono equivalenti ma non esistono aperti disgiunti $U, V \subset (\mathbb{R}/G)$ tali che $[0] \in U$ e $[1] \in V$. Infatti supponiamo che tali U e V esistano, e sia $\pi\colon \mathbb{R} \to (\mathbb{R}/G)$ l'applicazione quoziente. Allora $\pi^{-1}U$ e $\pi^{-1}V$ sono aperti disgiunti di $\mathbb{R}$, con $0 \in \pi^{-1}U$ e $1 \in \pi^{-1}V$. Siccome $1 \in \pi^{-1}V$, ogni $x \in \mathbb{R}$ equivalente a 1 appartiene a $\pi^{-1}V$, quindi 2^{-n} per $n \in \mathbb{Z}$ appartiene a $\pi^{-1}V$. Siccome $\pi^{-1}U$ è un aperto contenente 0 esiste $\epsilon > 0$ tale che $B(0, \epsilon) \subset \pi^{-1}U$ Per $n \gg 0$ abbiamo che $2^{-n} \in B(0, \epsilon)$ e quindi $\pi^{-1}U$ e $\pi^{-1}V$ non sono disgiunti, contraddizione. Abbiamo dimostrato che $\mathbb{R}/G$ non è di Hausdorff. Per dimostrare che $\mathbb{R}/G$ è compatto è sufficiente osservare che la restrizione di π a $[-1, 1]$ è suriettiva

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}/G \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Siccome $[-1, 1]$ è compatto ne segue che $\mathbb{R}/G$ è compatto.