Geometria I, a.a. 2013-14

Soluzioni della prova scritta

4 Febbraio 2014

Esercizio 1. Siano $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ i punti dati da

$$\begin{array}{llll} p_1 = [1,1], & p_2 = [1,-1], & p_3 = [1,-2], & p_4 = [1,2], \\ q_1 = [1,0], & q_2 = [0,1], & q_3 = [2,1], & q_4 = [1,2]. \end{array}$$

Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(p_i) = q_i$ per $i = 1,2,3,4$?

Risoluzione: Date due quaterne $(a_1, \ldots, a_4)$ e $(b_1, \ldots, b_4)$ di punti in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ in sé che manda la prima quaterna nella seconda se e solo se i birapporti delle due quaterne sono gli stessi. Ricordiamo che il birapporto dei punti è dato da

$$\beta([1,x_1],[1,x_2],[1,x_3],[1,x_4]) = \frac{(x_1 - x_4)\cdot(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3)\cdot(x_2 - x_4)}.$$

(La formula, opportunamente interpretetata, ha senso anche se $x_i = \infty$ per uno e uno solo degli i.) Ne segue che i valori dei birapporti delle quaterne $p_1, \ldots, p_4, \ldots, r_1, \ldots, r_4$ sono

$$\begin{array}{rcl} \beta(p_1,p_2,p_3,p_4) & = & \dfrac{1}{9} \\ \beta(q_1,q_2,q_3,q_4) & = & 4. \end{array}$$

Siccome i birapporti sono diversi *non* esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(p_i) = q_i$ per $i = 1,2,3,4$.

Esercizio 2. Sia $\varphi\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ una proiettività.

(a) Dimostrate che se n è pari esiste un punto fisso di φ.

(b) Per ogni n dispari date un esempio di φ che *non* ha punti fissi.

Risoluzione: (a): Per definizione esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\varphi = \mathbb{P}(f)$. Il polinomio caratteristico di f ha grado $(n+1)$; siccome n è pari questo grado è dispari e perciò esiste una radice reale λ_0 del polinomio caratteristico, cioè un autovalore reale di f. Sia $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ un autovettore con autovalore λ_0: allora $[v] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è un punto fisso di φ.

(b): Scriviamo $n = (2m-1)$. Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2m} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^{2m} \\ (x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_m,y_m) & \mapsto & (y_1,-x_1,y_2,-x_2,\ldots,y_m,-x_m) \end{array}$$

Notate che f è un isomorfismo di spazi lineari. La proiettività $\varphi := \mathbb{P}(f)$ di $\mathbb{P}^{2m-1}$ non ha punti fissi.

Esercizio 3. Siano $[f], [g]$ due coniche non-degeneri distinte di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (quindi $f, g \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$ sono forme quadratiche non degeneri), e supponiamo che $V(f)$ e $V(g)$ siano non vuoti.

(a) Dimostrate che esistono al più quattro rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tangenti a entrambe le coniche.

(b) Date un esempio in cui esistono quattro rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tangenti a entrambe le coniche, e uno in cui non esiste alcuna retta tangente a entrambe le coniche.

Risoluzione: (a): Le tangenti a una conica liscia sono gli zeri di una forma quadratica non degenere. Esplicitamente: se $f \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$ è data da $f(X) = X^t \cdot A \cdot X$ con $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ simmetrica non degenere, allora, nelle coordinate duali $[Y_0, Y_1, Y_2]$, l'insieme delle tangenti a $V(f)$ è data da $V(g)$ dove $g \in \mathbb{R}[Y_0, Y_1, Y_2]_2$ è data da

$$g(Y) = Y^t \cdot A^{-1} \cdot Y. \tag{1}$$

La $[g]$ è la *conica duale* di $[f]$. Dalla (1) vediamo che la duale della duale è la conica di partenza, in particolare coniche distinte hanno duali distinte. Le rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tangenti alle coniche $[f]$ e $[g]$ sono i punti d'intersezione (reali) tra la duale di $[f]$ e la duale di $[g]$. Le duali di $[f]$ e $[g]$ sono coniche non degeneri distinte: per il Teorema di Bézout i punti d'intersezione tra le le duali di $[f]$ e $[g]$ sono al più quattro.
(b): Due cerchi esterni l'uno all'altro hanno quattro tangenti in comune. Due cerchi concentrici non hanno tangenti in comune.

Esercizio 4. Dimostrate che $[0, 1)$ (con la topologia euclidea) *non* è omeomorfo a $(0, 1)$ (con la topologia euclidea).

Risoluzione: Per assurdo. Supponiamo che $f\colon [0, 1) \xrightarrow{\sim} (0, 1)$ sia un omeomorfismo. La restrizione di f a $(0, 1)$ definisce un omeomorfsimo $g\colon (0, 1) \xrightarrow{\sim} ((0, 1) \setminus f(0))$. Siccome l'intervallo $(0, 1)$ è connesso segue che anche $((0, 1) \setminus f(0))$ è connesso. Questo è assurdo perchè

$$((0, 1) \setminus f(0)) = (0, f(0)) \sqcup (f(0), 1)$$

realizza $((0, 1) \setminus f(0))$ come unione disgiunta di due aperti non vuoti, e quindi $((0, 1) \setminus f(0))$ *non* è connesso.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}_{\mathrm{sfry}}$ la retta di Sorgenfrey, cioè $\mathbb{R}$ munito della topologia di Sorgenfrey (che ha come base $\mathcal{B} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$). Di ciascuna delle seguenti successioni determinate se hanno limite, e nel caso calcolatelo.

(a) $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$

(b) $y_n = \dfrac{-1}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$

(c) $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$

Risoluzione: Notiamo che la topologia doi Sorgenfrey è più fine di quella euclidea. Siccome la topologia euclidea è di Hausdorff segue che anche la topologia di Sorgenfrey è di Hausdorff, e perciò se il limite di una successione esiste è unico. Segue anche che se una successione $\{t_n\}$ converge a $s \in \mathbb{R}$ nella topologia di Sorgenfrey allora $t_n \to s$ nella topologia euclidea.

(a): $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Infatti un sistema fondamentale di intorni di 0 è dato da $\{[0, 1/(m + 1))\}_{m\in\mathbb{N}}$.

(b): La successione $\{y_n\}$ non ha limite. Infatti se avesse limite allora il limite sarebbe uguale al limite nella topologia euclidea, cioè sarebbe 0. Ma $[0, 1)$ è un intorno di 0 per la topologia di Sorgenfrey e per ogni n si ha che $y_n \notin [0, 1)$.

(c): La successione $\{z_n\}$ non ha limite. Infatti se avesse limite allora il limite sarebbe uguale al limite nella topologia euclidea, cioè sarebbe 0. Ma $[0, 1)$ è un intorno di 0 per la topologia di Sorgenfrey e per ogni n dispari si ha che $y_n \notin [0, 1)$.