Geometria I - A.A. 2013/2014

Dr. G. Mondello

Secondo esonero

16 Gennaio 2014

Nome e cognome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30: | |
|---|

Esercizio 1. Determinate per quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$ è la topologia discreta e motivate la risposta.

(a) $X := \big\{ \{(n^2+1)/n\} \mid n \in \mathbb{N} \big\}$.

(b) Y è il sottoinsieme dei reali che, in base decimale, hanno solo 0 e 1 dopo la virgola (per esempio $5,01$ è in Y, come anche $-13,10100100010000\ldots$, ma non $1,5$).

(c) $Z := \big\{ (m^2+1)/m \mid m \in \mathbb{N}_+ \big\}$.

(Ricordiamo che la **parte frazionaria** *di $x \in \mathbb{R}$ è l'unico $\{x\} \in [0,1)$ tale che $(x - \{x\}) \in \mathbb{N}$, in altre parole $\{x\} = (x - [x])$ dove $[x]$ è la parte intera di x.)*

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

(a) X ha la topologia discreta / X *non* ha la topologia discreta

(b) Y_θ ha la topologia discreta / Y_θ *non* ha la topologia discreta

(c) Z ha la topologia discreta / Z *non* ha la topologia discreta

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_{\text{sfry}}$ la retta di Sorgenfrey, cioè $\mathbb{R}$ munito della topologia (di Sorgenfrey) che ha come base $\mathcal{B} = \{[a,b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$. Per $c \in \mathbb{R}$ sia

$$\begin{array}{rccc} \varphi_c : & \mathbb{R}_{\text{sfry}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\text{sfry}} \\ & x & \mapsto & c \cdot x \end{array}$$

Determinate per quali $c \in \mathbb{R}$ l'applicazione φ_c è continua, e *motivate* la risposta.

Risoluzione:

Risposta:

L'applicazione φ_c è continua se e solo se $\boxed{}$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}_{\mathrm{scs}}$ l'insieme dei numeri reali, munito della topologia della semicontinuità superiore (un sottoinsieme è aperto se è uguale a $(-\infty, a)$ per un qualche $a \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$). Dimostrate che un sottoinsieme non vuoto $K \subseteq \mathbb{R}_{\mathrm{scs}}$ (con la topologia indotta) è compatto se e solo se $s = \sup(K) < +\infty$ e $s \in K$.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$) definito da

$$X := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \geq 0\}.$$

Dimostrate che X *non* è omeomorfo a $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea).

Risoluzione:

Esercizio 5. Dato $\vartheta \in \mathbb{R}$, sia G_ϑ il gruppo delle rotazioni di S^1 di angolo un multiplo *intero* di θ e sia $\overset{\vartheta}{\sim}$ la relazione di equivalenza su S^1 definita ponendo

$$x \overset{\vartheta}{\sim} y \text{ se esiste } g \in G_\vartheta \text{ tale che } x = g(y).$$

Dimostrate che se $\vartheta/2\pi \in \mathbb{Q}$ allora $S^1/\overset{\vartheta}{\sim}$ è omeomorfo a S^1.

Risoluzione: