Geometria I

Dott. G. Mondello

I Esonero

11 Novembre 2013

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30:

Esercizio 1. Siano $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ i punti dati da

$$\begin{array}{llll} p_1 = 1, & p_2 = 2, & p_3 = 3, & p_4 = \infty, \\ q_1 = 2, & q_2 = 3, & q_3 = \infty, & q_4 = 1, \\ r_1 = 1, & r_2 = 3, & r_3 = 2, & r_4 = \infty. \end{array}$$

(Identifichiamo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ con $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \sqcup \{\infty\}$.)

1. Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(p_i) = q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$?
2. Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(p_i) = r_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$?

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

1. Esiste / non esiste
2. Esiste / non esiste

Esercizio 2. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}(\mathbb{R}[X,Y]_2)$ siano $p_0,\dots,p_3$ e q i punti

$$p_0 := [X^2], \quad p_1 := [Y^2], \quad p_2 := [(X+Y)^2], \quad p_3 := [(X-Y)^2], \quad q := [X^2+2XY+3Y^2]$$

1. Verificate che $p_0,\dots,p_3$ sono in posizione generale.
2. Determinate coordinate omogenee di q nel riferimento $\mathcal{R}(p_0,p_1,p_2,p_3)$.

Risoluzione:

Risposta:

Coordinate omogenee di q nel riferimento $\mathcal{R}(p_0,p_1,p_2,p_3)$: $\boxed{}$

Esercizio 3. Siano

$$f := 2x^2 + 3x + 5, \qquad g := x^2 - 2x + 4.$$

1. Esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $0 = f(\alpha) = g(\alpha)$?
2. Esiste $\beta \in \mathbb{Z}/(163)$ (notate che 163 è un numero primo) tale che $0 = f(\beta) = g(\beta)$?

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

1. Esiste / non esiste
2. Esiste / non esiste

Esercizio 4. Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}(\mathbb{C}[X,Y]_2)$ sia

$$\Delta := \{[\ell^2] \mid 0 \neq \ell \in \mathbb{C}[X,Y]_1\}.$$

1. Verificate che Δ è il supporto di una conica non-degenere $[\Phi]$ di $\mathbb{P}(\mathbb{C}[X,Y]_2)$.
2. Dato $[\ell_0^2] \in \Delta$ verificate che

$$\mathbf{T}_{[\ell_0^2]}[\Phi] = \{[\ell_0 \cdot \ell] \mid 0 \neq \ell \in \mathbb{C}[X,Y]_1\}.$$

Risoluzione:

Esercizio 5. Siano $[F], [G], [H]$ ipersuperfici nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ definite da

$$\begin{aligned} F(X_0, X_1, X_2, X_3) &= (X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)(X_0 + X_3) \\ G(X_0, X_1, X_2, X_3) &= X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 \\ H(X_0, X_1, X_2, X_3) &= X_1^3 - X_0 X_3^2 \end{aligned}$$

1. Sono $[F]$ e $[G]$ proiettivamente equivalenti?
2. Sono $[F]$ e $[H]$ proiettivamente equivalenti?
3. Sono $[G]$ e $[H]$ proiettivamente equivalenti?

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

1. Sì / No
2. Sì / No
3. Sì / No