Geometria I

Dott. G. Mondello

Appello straordinario - Aprile 2015

Nome e cognome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30:

Esercizio 1. Siano $P_i, Q_i \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ i punti dati da

$$\begin{array}{llll} P_1 = 1, & P_2 = 2, & P_3 = 3, & P_4 = \infty, \\ Q_1 = 0, & Q_2 = 3, & Q_3 = 6, & Q_4 = 4. \end{array}$$

(Identifichiamo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ con $\mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$.)

(a) Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$?

(b) Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi\big(\{P_1, P_2, P_3, P_4\}\big) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$?

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

(a) Esiste / non esiste

(b) Esiste / non esiste

Esercizio 2. (a) Enunciare il teorema spettrale per operatori hermitiani e per operatori unitari su uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita munito di un prodotto hermitiano.

(b) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ munito del prodotto hermitiano

$$h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = iv_1\overline{w}_2 - iv_2\overline{w}_1 + 2v_2\overline{w}_2 + v_2\overline{w}_3 + v_3\overline{w}_2 - v_3\overline{w}_3\,.$$

Consideriamo l'operatore $L_M : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definito dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se l'operatore L_M sia unitario e/o autoaggiunto per h.

Risoluzione:

Risposte (cerchiare quelle giuste):

(b) L_M è unitario / non unitario , autoaggiunto / non autoaggiunto

Esercizio 3. Si consideri la curva C in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definita da

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^2 X_2^3 + X_0^3 X_1^2 + X_2^5$$

(a) Determinare i punti singolari di C, calcolarne la molteplicità e le equazioni delle tangenti principali.

(b) Per ciascun punto singolare P e per ciascuna retta ℓ tangente principale alla curva C in P, si determini la molteplicità di intersezione di ℓ con C in P.

Risoluzione:

Risposta:

(a) Lista dei punti singolari e loro molteplicità:

(b) Molteplicità di intersezione:

Esercizio 4. Dimostrare oppure dare un controesempio.

(a) Se non vuoto, il supporto di una curva algebrica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è necessariamente compatto.

(b) Se non vuoto, il supporto di una curva algebrica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è necessariamente non compatto.

(c) Se non vuoto, il supporto di una curva algebrica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è necessariamente connesso.

(Nota: lo spazio affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ sono dotati delle topologie standard.)

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

(a) Vero / Falso

(b) Vero / Falso

(c) Vero / Falso

Esercizio 5. Considerare i punti $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (0, 3)$ del piano affine reale $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e sia ℓ la retta affine in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione $x - 2y - 1 = 0$.

(a) Determinare l'equazione della conica affine $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ passante per i punti P_0, P_1, P_2, P_3 e tangente alla retta ℓ in P_0.

(b) Classificare tale conica C a meno di affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

(a) Equazione della conica:

(b) Classificazione affine di C: