Geometria I

Esame scritto

25 settembre 2014

Nome e cognome: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30: ______

Esercizio 1. Siano $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ rette proiettive di equazioni

$$\begin{aligned} \ell_1 &: 2X_0 - X_1 + X_2 = 0 \\ \ell_2 &: 5X_0 - aX_2 = 0 \\ \ell_3 &: 3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \end{aligned}$$

Determinate per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ le tre rette sono concorrenti.
Per ciascun valore trovato del parametro a, calcolare il punto di intersezione delle tre rette.

Risoluzione:

Risposta:
Le tre rette sono concorrenti per $a =$
Hanno punto di intersezione:

Esercizio 2. Siano $[X_0 : X_1 : X_2]$ le coordinate omogenee standard su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e sia $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]_2)$ lo spazio delle coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
Dimostrare che il luogo $S \subset \mathbb{P}$ delle coniche singolari è il supporto di una ipersuperficie.
Si determini inoltre il grado di tale ipersuperficie e si dica se è singolare.

Risoluzione:

Risposta: Il grado di tale ipersuperficie è:

Tale ipersuperficie *è* / *non è* singolare.

Esercizio 3. Sia $[F]$ una curva in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Dimostrare che, se $[F]$ è non singolare, allora $[F]$ è irriducibile. È vero il viceversa? *(Dimostrare o dare un controesempio.)*

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta): Il viceversa *è* / *non è* vero.

Esercizio 4. Siano $[0, 1]$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ muniti della topologia euclidea usuale.
Data un'applicazione continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, si definiscano

$$S_f := \left\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq y \leq 100\right\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$R_f := \left\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq y\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Determinare se R_f e S_f siano necessariamente connessi e/o compatti.

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

S_f è sempre connesso / *S_f può essere sconnesso* ; *S_f è sempre compatto* / *S_f può essere non compatto*

R_f è sempre connesso / *R_f può essere sconnesso* ; *R_f è sempre compatto* / *R_f può essere non compatto*

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea e sia G il gruppo $G := \{\phi_k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, dove $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definito come $\phi_k(x) = 2^k x$.

(a) Dire se il quoziente $X := \mathbb{R}/G$ di $\mathbb{R}$ per l'azione del gruppo G sia di Hausdorff e se sia compatto.

(b) Dire se $Y := X \setminus \{[0]\}$ sia compatto.

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

(a) *X è di Hausdorff* / *X non è di Hausdorff* ; *X è compatto* / *X non è compatto*

(b) *Y è compatto* / *Y non è compatto*