# Geometria I

*Dr. G. Mondello*

**Esame scritto**

24 LUGLIO 2014

*Nome e cognome:* ________________

| Esercizio | Punti totali | Punteggio |
|---|---|---|
| 1 | 7 | |
| 2 | 7 | |
| 3 | 7 | |
| 4 | 7 | |
| 5 | 7 | |
| Totale | 35 | |

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà* 0 *punti.*

**Voto/30:** 

**Esercizio 1.** Siano $p_1, \dots, p_4 \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ dati da

$$p_1 = [1,0], \quad p_2 = [1,1], \quad p_3 = [1,2], \quad p_4 = [0,1],$$

e $q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ dati da

$$q_1(t) = [1,1], \quad q_2(t) = [2t,1], \quad q_3(t) = [1,2], \quad q_4(t) = [2,t].$$

Determinate per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una proiettivià $\varphi \colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che

$$\varphi(p_i) = q_i(t) \qquad i = 1, \dots, 4.$$

**Risoluzione**:

**Risposta:**

Una tale proiettività esiste per $t =$

**Esercizio 2.** Diciamo che una proiettività $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ preserva la retta proiettiva $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ se $F(L) = L$.
Determinare per quali $m \geq 0$ esiste una proiettività $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che preservi esattamente $m$ rette distinte di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(L'esercizio sarà completo solo se per ogni $m$ per cui esiste una proiettività che preservi esattamente $m$ rette se ne darà un *esempio*.)

**Risoluzione (ed esempi)**:

**Risposta:** Una tale proiettività esiste per $m =$

**Esercizio 3.** Si determinino le coniche $[f]$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (dove $f \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$) passanti per i punti

$$[1,0,0], \quad [0,1,0], \quad [0,0,1], \quad [1,1,1]$$

e tangenti alla retta $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana

$$X_0 + 2X_1 - X_2 = 0.$$

**Risoluzione**:

**Risposte (cerchiare quelle giuste):**

Le coniche volute hanno equazioni:

**Esercizio 4.** Siano $X$ e $Y$ due spazi topologici e sia $\mathcal{Z} = \{Z_i \subset X \mid i \in I\}$ un ricoprimento di $X$. Sia inoltre $f : X \to Y$ un'applicazione tale che la restrizione $f|_{Z_i} : Z_i \to Y$ di $f$ a $Z_i$ sia continua per ogni $i \in I$.

Dimostrare le seguenti affermazioni oppure dare un controesempio.

(a) $f$ è continua.

(b) Se tutti gli $Z_i$ sono aperti, allora $f$ è continua.

(c) Se tutti gli $Z_i$ sono chiusi, allora $f$ è continua.

**Risoluzione**:

**Risposta (cerchiare quella giusta):**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | Vero | / | Falso |
| (b) | Vero | / | Falso |
| (c) | Vero | / | Falso |

**Esercizio 5.** Dato un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^2$, denotiamo con $\mathbb{R}^2/S$ lo spazio topologico ottenuto quozientando lo spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ per la relazione di equivalenza che dichiara $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in S$.
Dire se i seguenti spazi topologici $X, Y$ siano di Hausdorff e se soddisfino il primo assioma di numerabilità (cioè se ogni loro punto abbia un sistema fondamentale di intorni numerabile).
Giustificare la risposta.

(a) $X = \mathbb{R}^2/L$ con $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

(b) $Y = \mathbb{R}^2/D$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

**Risoluzione**:

**Risposta (cerchiare quella giusta):**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $X$ è Hausdorff / $X$ non è Hausdorff | | (b) | $Y$ è Hausdorff / $Y$ non è Hausdorff |
| | $X$ ha SFI numerabili / $X$ non ha SFI numerabili | | | $Y$ ha SFI numerabili / $Y$ non ha SFI numerabili |