Geometria I

Dr. G. Mondello

Esame scritto

3 luglio 2014

Nome e cognome: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si considerino i punti $P = [1, -2, 1]$, $Q = [1, 2, 2]$, $R_t = [t, 1, -1]$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
Dire per quali valori del parametro t i punti P, Q, R_t sono allineati e, in tal caso, calcolare l'equazione della retta che li contiene.

Risoluzione:

Risposta:

P, Q, R_t sono allineati per $t =$

L'equazione della retta per P, Q, R_t è

Esercizio 2. Determinare per quali $m \geq 0$ esiste una proiettività $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che fissi esattamente m punti di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. (L'esercizio sarà completo solo se per ogni m per cui esiste una proiettività che fissa esattamente m punti se ne darà un *esempio*.)

Risoluzione (ed esempi):

Risposta: una tale proiettività esiste per $m =$

Esercizio 3. Siano $f, g \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$ dati da

$$f := 5X_0^2 + 4X_0X_2 + X_1^2 + X_2^2, \qquad g := X_0^2 + 4X_0X_2 + 2X_1^2 + 2X_2^2.$$

1. Siano $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f), \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(g) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i sottoinsiemi di equazioni cartesiane $f = 0$ e $g = 0$ rispettivamente. Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(g)$?
2. Siano $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(f), \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(g) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ i sottoinsiemi di equazioni cartesiane $f = 0$ e $g = 0$ rispettivamente. Esiste una proiettività ψ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\psi(\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(g)$?

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

Esiste / Non esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(g)$.

Esiste / Non esiste una proiettività ψ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\psi(\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(f)) = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(g)$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e sia p un numero primo. Definiamo $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ come $d_p(x, y) := |x - y|_p$ dove

$$|z|_p := \begin{cases} 0 & \text{se } z = 0 \\ p^{-d} & \text{se } z = \frac{a}{b} p^d \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ primi con } p \end{cases}$$

(a) Dimostrare che d_p definisce una distanza su $\mathbb{Q}$.

(b) Dimostrare che esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ convergente per la topologia euclidea ma non convergente per la topologia indotta da d_p.

(c) Dimostrare che esiste una successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ convergente per la topologia indotta da d_p ma non convergente per la topologia euclidea.

(I punti (b) e (c) dimostrano che la topologia metrica indotta da d_p *non* è confrontabile con la topologia euclidea.)

Risoluzione:

Esercizio 5. Si dimostri che S^1 (con la topologia euclidea) *non* è omeomorfo all'intervallo chiuso $[0, 1]$ con la topologia euclidea.

Risoluzione: