Geometria I

Dr. G. Mondello

Esame scritto

25 Febbraio 2014

Nome e Cognome: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30:

Esercizio 1. Siano $L_1, \dots, L_4 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ le rette di equazioni cartesiane rispettive

$$X_0 + X_1 = 0, \qquad X_0 + 2X_1 = 0, \qquad X_0 - X_1 = 0, \qquad X_0 - 2X_1 = 0,$$

e $M_1, \dots, M_4 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ le rette di equazioni cartesiane rispettive

$$X_1 = 0, \qquad X_1 + X_2 = 0, \qquad X_1 + 2X_2 = 0, \qquad X_1 + 3X_2 = 0.$$

Dare una proiettività φ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(L_i) = M_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$, *oppure* dimostrare che una tale proiettività non esiste.

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

Una tale φ *esiste* / Una tale φ *non esiste*

Esercizio 2. Per $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ siano $L_{[\lambda,\mu]}, M_{[\lambda,\mu]} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le rette di equazioni cartesiane rispettivamente

$$(2\lambda - \mu)X_1 + \mu X_2 = 0, \qquad \lambda X_0 + \mu X_1 = 0.$$

Sia $D \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'insieme i cui punti sono le intersezioni $L_{[\lambda,\mu]} \cap M_{[\lambda,\mu]}$ al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$D := \bigcup_{[\lambda,\mu]} L_{[\lambda,\mu]} \cap M_{[\lambda,\mu]}.$$

Dimostrare che D è il supporto di una conica liscia, e datene una equazione esplicita.

Risoluzione:

Risposta: l'equazione di D è

Esercizio 3. Si considerino le curve $[f], [g], [h]$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ definite da

$$f(x,y) = y^2 - x, \qquad g(x,y) = y^2 - x^2, \qquad h(x,y) = y^2 - x^3$$

Dotiamo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ della topologia euclidea. Dire se

(a) $V(f)$ sia omeomorfo a $V(g)$;

(b) $V(g)$ sia omeomorfo a $V(h)$;

(c) $V(f)$ sia omeomorfo a $V(h)$;

dove $V(f), V(g), V(h) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ sono muniti della topologia di sottospazio.

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

(a) $V(f)$ *è* omeomorfo a $V(g)$ / $V(f)$ *non è* omeomorfo a $V(g)$

(b) $V(g)$ *è* omeomorfo a $V(h)$ / $V(g)$ *non è* omeomorfo a $V(h)$

(c) $V(f)$ *è* omeomorfo a $V(h)$ / $V(f)$ *non è* omeomorfo a $V(h)$

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}_{scs}$ l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia della semicontinuità superiore (gli aperti sono i sottoinsiemi $(-\infty, a)$ per $a \in \{-\infty, +\infty\}$). Si dimostri che

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y < x^2\}$$

è denso nello spazio topologico prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{scs}$ (come di consueto $\mathbb{R}$ denota l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea).

Risoluzione:

Esercizio 5. Per $n \in \mathbb{Z}$ siano

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\mu_n} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^n \cdot x \end{array}$$

Osserviamo che $G := \{\mu_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo del gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ degli omeomorfismi di $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea).

(a) Dire se il quoziente $\mathbb{R}/G$ sia di Hausdorff.

(b) Dire se il quoziente $\mathbb{R}/G$ sia compatto.

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quelle giusta):

(a) Il quoziente $\mathbb{R}/G$ *è* di Hausdorff / Il quoziente $\mathbb{R}/G$ *non è* di Hausdorff.

(b) Il quoziente $\mathbb{R}/G$ *è* compatto / Il quoziente $\mathbb{R}/G$ *non è* compatto.