Geometria I

Dr. G. Mondello

Esame scritto

4 Febbraio 2014

Nome e Cognome: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Voto/30: [ ]

Esercizio 1. Siano $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ i punti dati da

$$\begin{array}{llll} p_1 = [1,1], & p_2 = [1,-1], & p_3 = [1,-2], & p_4 = [1,2], \\ q_1 = [1,0], & q_2 = [0,1], & q_3 = [2,1], & q_4 = [1,2]. \end{array}$$

Esiste una proiettività φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(p_i) = q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$?

Risoluzione:

Risposta (cerchiare quella giusta):

Esiste / Non esiste

Esercizio 2. Sia $\varphi\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ una proiettività.

(a) Dimostrate che se n è pari esiste un punto fisso di φ.

(b) Per ogni n dispari date un esempio di φ che *non* ha punti fissi.

Risoluzione:

Esercizio 3. Siano $[f], [g]$ due coniche non-degeneri distinte di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (quindi $f, g \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$ sono forme quadratiche non degeneri), e supponiamo che $V(f)$ e $V(g)$ siano non vuoti.

(a) Dimostrate che esistono al più quattro rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tangenti a entrambe le coniche.

(b) Date un esempio in cui esistono quattro rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tangenti a entrambe le coniche, e uno in cui non esiste alcuna retta tangente a entrambe le coniche.

Risoluzione:

Esercizio 4. Dimostrate che $[0,1)$ (con la topologia euclidea) *non* è omeomorfo a $(0,1)$ (con la topologia euclidea).

Risoluzione:

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}_{\text{sfry}}$ la retta di Sorgenfrey, cioè $\mathbb{R}$ munito della topologia di Sorgenfrey (che ha come base $\mathcal{B} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$). Di ciascuna delle seguenti successioni determinate se hanno limite, e nel caso calcolatelo.

(a) $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$

(b) $y_n = \dfrac{-1}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$

(c) $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$

Risoluzione:

Risposta:

1. Non esiste / $\lim\limits_{n\to\infty} 1/(n+1)$ esiste ed è =
2. Non esiste / $\lim\limits_{n\to\infty} -1/(n+1)$ esiste ed è =
3. Non esiste / $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n/(n+1)$ esiste ed è =