Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 9

Terminologia. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici è *aperta* se per ogni aperto $U \subset X$ l'immagine $f(U)$ è aperta, è *chiusa* se per ogni chiuso $C \subset X$ l'immagine $f(C)$ è chiuso.

Terminologia. Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una collezione di spazi topologici: l'unione disgiunta degli spazi X_i per $i \in I$ si denota $\bigsqcup_{i\in I} X_i$.

Terminologia. "Lo spazio topologico X ha la proprietà (N1)" è sinonimo di "Lo spazio topologico X soddisfa il primo assioma di numerabilità" (ovvero è primo-numerabile).

Terminologia. Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine reale. Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{S}$ è *convesso* se dati comunque $p, q \in C$ il segmento $\{tp + (1-t)q \mid 0 \le t \le 1\}$ è contenuto in C.

Esercizio 1.
Dimostrate che lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ con la topologia *euclidea* è di Hausdorff, soddisfa il primo assioma di numerabilità ed è connesso per archi.
Dimostrate che valgono gli stessi risultati per lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ con la topologia *euclidea.*

Esercizio 2.
Nello spazio topologico euclideo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ sia Q il sottospazio

$$Q := \{[X_0, X_1, X_2, X_3] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \mid X_0X_1 - X_2X_3 = 0\}.$$

(Quindi Q è il supporto di una quadrica liscia e ha la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.)
Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\varphi} & Q \\ ([S_0, S_1], [T_0, T_1]) & \mapsto & [S_0T_0, S_1T_1, S_0T_1, S_1T_0] \end{array}$$

Dimostrate che φ è un omeomorfismo se $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ ha la topologia euclidea e $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la topologia prodotto.
Concludete che Q è omeomorfa a $S^1 \times S^1$.

Esercizio 3.
"Copiate" l'Esercizio 2 e dimostrate che se $q\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ è una forma quadratica non-degenere allora $\mathbf{V}(q) \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ è omeomorfa a $S^2 \times S^2$.

Esercizio 4.
Siano $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ due applicazioni di spazi topologici e denotiamo con

$$f \times g : X \times Z \to Y \times W$$

l'applicazione definita come $(f \times g)(x, z) := (f(x), g(z))$.

(a) Dimostrare che, se f e g sono continue, allora $f \times g$ è continua.

(b) Dimostrare che, se f e g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.

(c) Mostrare con un esempio che, se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ può non essere chiusa.

Esercizio 5.
Siano X, Y spazi topologici e sia $Z := \bigsqcup_{y \in Y} X \times \{y\}$.
Consideriamo l'applicazione naturale $f : Z \to X \times Y$ definita come $f(x, y) = (x, y)$.

(a) Dimostrare che f è continua.

(b) Dimostrare che, se Y ha la topologia discreta, allora f è un omeomorfismo.

Esercizio 6.
Sia $A \subset X$ un sottoinsieme denso e siano $f, g : X \to Y$ applicazioni continue tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$.

(a) Mostrare con un esempio che può aversi $f \neq g$.

(b) Dimostrare che, se Y è di Hausdorff, allora $f = g$.

Esercizio 7.
Dimostrare che uno spazio topologico Z è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto $x \in X$ si ha

$$\bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} \overline{U} = \{x\} .$$

Esercizio 8.
Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e sia $\Gamma := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ il suo grafico.

(a) Mostrare che un esempio che Γ può non essere un chiuso in $X \times Y$.

(b) Mostrare che, se Y è di Hausdorff, allora Γ è un chiuso in $X \times Y$.

Esercizio 9.
Sia (Y, d) uno spazio metrico e siano $Z, W \subset Y$ chiusi disgiunti.
Dimostrare che esistono aperti disgiunti $A, B \subset Y$ tali che $Z \subseteq A$ e $W \subseteq B$.

Esercizio 10.
Sia $X = \mathbb{R}$ munito della topologia di Sorgenfrey (che ha come base $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$).

(a) Dimostrare che X è di Hausdorff.

(b) Dimostrare che X ha la proprietà (N1).

(c) Sia $D := \{(x, y) \in X \times X \mid x + y = 0\}$. Dimostrare che D è un chiuso in $X \times X$. Dimostrare che $D_+ := D \cap \{y > 0\}$ e $D_{\leq 0} := D \cap \{y \leq 0\}$ sono chiusi disgiunti in $X \times X$.

(d) Dimostrare che non esistono aperti disgiunti $A, B \subset X \times X$ tali che $D_+ \subseteq A$ e $D_{\leq 0} \subseteq B$.

(e) Usare l'Esercizio 6 per concludere che $X \times X$ non è metrizzabile e che quindi X non è metrizzabile.

Esercizio 11.
Siano X, Y spazi topologici (non vuoti) connessi per archi.

(a) Dimostrare che $X \times Y$ è connesso per archi.

(b) Dimostrare che $X \coprod Y$ non è connesso per archi.

Esercizio 12.

(a) Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme limitato e convesso. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus K$ è connesso per archi.

(b) Sia $Q \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme al più numerabile. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ è connesso per archi.

Esercizio 13.
Sia X uno spazio topologico. Per ogni $x, y \in X$ diciamo che $x \sim y$ sono *connessi da un arco* se esiste $\gamma : [0,1] \to X$ continua tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

(a) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su X.

(b) Sia C una classe di equivalenza per $\sim$. Dimostrare che C è connessa per archi. Dimostrare che, se $C \subseteq B \subseteq X$ e B è connesso per archi, allora $C = B$. (Una tale classe di equivalenza si chiama *una componente connessa per archi di* X.)

(c) Dimostrare con esempi con una tale C può non essere chiusa e può non essere aperta in X.

Esercizio 14.
Dimostrare che i due sottospazi di $\mathbb{R}^2$ definiti come

$$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\},$$
$$Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y-1)^2 = 1\}$$

non sono omeomorfi.

Esercizio 15.
Per ogni $n \geq 1$ intero, sia L_n la retta di $\mathbb{R}^2$ definita come $L_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ny = x\}$ e sia $X = \bigcup_{n \geq 1} L_n$. Muniamo ciascuna L_n della topologia di sottospazio indotta da $\mathbb{R}^2$ e consideriamo su X la topologia τ più fine che rende tutte le inclusioni $j_n : L_n \hookrightarrow X$ continue. Dire se (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità (N1).

Esercizio 16.

(a) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto non vuoto e sia $x \in A$. Dimostrare che l'unione di tutti i sottoinsiemi di A connessi per archi che contengono x è un intervallo aperto.

(b) Dimostrare che ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ è una unione al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti. *(Ricordate che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è denso.)*