Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 8

Esercizio 1.
Dite se la topologia indotta su

$$X := \{0\} \cup \{1/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$ è quella discreta.

Esercizio 2.
Sia X uno spazio topologico e siano $A, B \subseteq X$. Dimostrare che $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Esercizio 3.
Siano X, Y spazi topologici e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di punti in X e Y rispettivamente. Dimostrate che $(a, b) \in X \times Y$ è limite della successione $\{(x_n, y_n)\}$ se e solo se $x_n \to a$ in X e $y_n \to b$ in Y.

Esercizio 4.
Sia A un sottoinsieme denso di uno spazio topologico X.
Dimostrare che per ogni aperto $U \subseteq X$ vale $U \subseteq \overline{U \cap A}$.

Esercizio 5.
Per $n > 0$ naturale sia

$$S_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ny = x,\ x > 0\}$$

e poniamo $S_\infty := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Notate che gli insiemi $S_\infty, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ sono a due a due disgiunti. Dite se la topologia indotta su

$$X := S_\infty \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subset \mathbb{R}^2$$

dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ è quella dell'unione disgiunta, ovvero se l'identità

$$Y := S_\infty \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} S_n \longrightarrow X$$

è un omeomorfismo, dove ciascun S_n e S_∞ sono dotati naturalmente della topologia indotta come sottospazi di $\mathbb{R}^2$.
Stessa domanda con S_n e S_∞ sostituiti da

$$T_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = n\}, \qquad n \in \mathbb{N}_+$$

e $T_\infty := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ rispettivamente.

Esercizio 6.
Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che $\{x\} \subseteq X$ è chiuso per ogni $x \in X$ se e solo se

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U$$

per ogni $x \in X$.

Esercizio 7.
Sia X un insieme finito, sia $Y = \mathcal{P}(X)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X. Definiamo una funzione $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ come

$$d(A, B) = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

dove $|A|$ è la cardinalità dell'insieme A. Dimostrare che d è una distanza su Y.

Esercizio 8.
Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$. Supponiamo che la topologia di sottospazio su Y coincida con la topologia discreta. Dimostrare o dare un controesempio:

(a) La topologia di sottospazio su $\overline{Y}$ è la topologia discreta.

(b) Se X è metrizzabile, allora Y è un chiuso di X.

Esercizio 9.
Siano X e Y spazi topologici e siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare, se A e B sono chiusi allora $A \times B$ è chiuso in $X \times Y$.

Esercizio 10.
Sia (X, d) uno spazio metrico. Mostrare che l'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è continua rispetto alla topologia prodotto.

Esercizio 11.
Sia $\mathbb{R}$ la retta di Sorgenfrey, cioè $\mathbb{R}$ munito della topologia di Sorgenfrey (che ha come base $\mathcal{B} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \,|\, a < b\}$). Dimostrate che la topologia indotta sul sottospazio $S := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x + y = 0\}$ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è la topologia discreta.

Esercizio 12.
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e consideriamo il prodotto $X \times Y$.
Verificare che d_1, d_2, d_∞ definite come

$$\begin{aligned}
d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \\
d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} \\
d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max\{d_X(x_1, x_2),\, d_Y(y_1, y_2)\}
\end{aligned}$$

sono distanze su $X \times Y$ e dimostrare che inducono tutte e tre la topologia prodotto.

Esercizio 13.
Sia $(x_n) \subset X$ una successione e sia $\mathcal{L} \subseteq X$ l'insieme dei limiti di (x_n).
Dimostrare oppure dare un controesempio:

(a) $\mathcal{L}$ è un chiuso di X.

(b) $\mathcal{L} = \overline{\{x\}}$ per un qualunque $x \in \mathcal{L}$.

(c) Se X è uno spazio metrico, $\mathcal{L}$ contiene al più un elemento.

Esercizio 14.
Sia $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ data da $C := V(X^2 + Y^2 - Z^2)$, con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Verificate che C è omeomorfa a S^1 (il cerchio dei vettori di norma 1 in $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare standard). Sia $p_0 := [0, 1, 1] \in C$. Sia $R := V(Y)$ (quindi R è una retta proiettiva reale), con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Definiamo l'applicazione $\varphi\colon C \to R$ nel seguente modo. Se $p \in (C \setminus p_0)$ allora $\varphi(p)$ è l'unico punto d'intersezione tra la retta $\langle p_0, p\rangle$ e R, se $p = p_0$ allora $\varphi(p)$ è l'unico punto d'intersezione tra la retta $\mathbf{T}_{p_0}[X^2 + Y^2 - Z^2]$ e R. Dimostrate che φ è un omeomorfismo (e quindi $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ è omeomorfo a S^1).

Esercizio 15.
"Copiate" l'Esercizio 14 per dimostrare che $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ con la topologia euclidea è omeomorfo a S^2 (con la topologia indotta dall'inclusione $S^2 \subset \mathbb{R}^3$).