Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 7

Esercizio 1.
Sia X un insieme finito. Dimostrare che qualunque distanza su X induce la topologia discreta.

Esercizio 2.
Sia X un insieme e $\infty \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\tau = \{A \subseteq X \,|\, \infty \notin A, \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito}\}$$

è una topologia su X.

Esercizio 3.
Siano X, Y spazi topologici e sia $y \in Y$. Dimostrare che l'applicazione costante $f : X \to Y$ definita come $f(x) = y$ per ogni $x \in X$ è continua, indipendentemente dalle topologie considerate.

Esercizio 4.
Dire quali fra i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sono topologie su $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{[a, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\} \cup \{\emptyset\} \\
\tau_2 &= \{(-a, a) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\} \cup \{\emptyset\} \\
\tau_3 &= \{(-a, a) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a \in \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}\} \cup \{\emptyset\} \\
\tau_4 &= \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \cap \mathbb{Q} = \emptyset\} \\
\tau_5 &= \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, \mathbb{R} \setminus A \text{ è finito o numerabile}\}\ .
\end{aligned}$$

Esercizio 5.
Elencare le possibili topologie sull'insieme $X = \{0, 1\}$ e sull'insieme $Y = \{a, b, c\}$.

Esercizio 6.
Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un sottoinsieme non vuoto.
Definiamo $d_Y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$d_Y(x) = \inf \{d(x, y) \,|\, y \in Y\}$$

(a) Dimostrare che d_Y è continua.

(b) Dimostrare che $U_\varepsilon := \{x \in X \,|\, d_Y(x) < \varepsilon\}$ è un aperto che contiene Y per ogni $\varepsilon > 0$.

(c) Dimostrare che $V := \{x \in X \,|\, d_Y(x) > 0\}$ è il più grande aperto di X che non interseca Y.

Esercizio 7.
Muniamo gli insiemi $\mathbb{R}^n$ della topologia classica (ossia la topologia indotta dalla metrica euclidea).

(a) Dimostrare che le applicazioni lineari e le applicazioni affini $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono continue.

(b) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Dato un sistema di coordinate $X : V \to \mathbb{R}^n$, possiamo definire

$$\tau := \{A \subseteq V \,|\, X(A) \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n\}$$

Dimostrare che τ è una topologia su V e che è indipendente dalla scelta del sistema X di coordinate. (Tale τ sarà la topologia classica su uno spazio vettoriale reale.)

(b') Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione n. Dato un sistema di coordinate affini $x : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, possiamo definire

$$\tau' := \{A \subseteq \mathbb{A} \,|\, x(A) \text{ è aperto in } \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}\}$$

Dimostrare che τ' è una topologia su $\mathbb{A}$ e che è indipendente dalla scelta del sistema x di coordinate affini. (Tale τ' sarà la topologia classica su uno spazio affine reale.)

(c) Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale munito della topologia classica τ'. Dimostrare che, per ogni sottospazio affine $\Pi \subset \mathbb{A}$, il complementare $\mathbb{A} \setminus \Pi$ è aperto.

Esercizio 8.
Sia $\mathbb{P}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Ricordiamo che, per ogni iperpiano $H \in \mathbb{P}^\vee$ di $\mathbb{P}$, il complementare $\mathbb{P} \setminus H$ ha una struttura di spazio affine reale di dimensione n. Definiamo quindi

$$\tau := \{A \subset \mathbb{P} \,|\, A \cap (\mathbb{P} \setminus H) \text{ è aperto in } \mathbb{P} \setminus H \text{ per ogni } H \in \mathbb{P}^\vee\}$$

(a) Dimostrare che τ è una topologia su $\mathbb{P}$. (Chiameremo τ topologia classica su $\mathbb{P}$.)

(b) Dimostrare che il complementare $\mathbb{P} \setminus L$ di un sottospazio proiettivo $L \subset \mathbb{P}$ è un aperto (per τ).

(c) Sia $\mathbb{V}([F]) \subset \mathbb{P}$ il supporto di una ipersuperficie $[F]$. Dire in quali casi $\mathbb{V}([F])$ è un aperto.

Esercizio 9.
Sia $\mathbb{R}$ munito della topologia classica e sia $C \subset \mathbb{R}$ il sottoinsieme di Cantor definito come l'insieme dei numeri reali x la cui espressione *in base* 3 è del tipo

$$x = 0.(a_1)(a_2)(a_3)\dots(a_n)\dots\dots$$

dove l'i-esima cifra $a_i \in \{0, 2\}$.
Dimostrare che $\mathbb{R} \setminus C$ è un aperto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 10.
Sia X un insieme. Date due metriche d_1 e d_2 su X, dichiariamo che $d_1 \sim d_2$ se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\frac{1}{c} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c\, d_1(x, y)$$

(a) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme delle metriche su X.

(b) Dimostrare che metriche equivalenti inducono la stessa topologia. È vero il viceversa?

(c) Siano b e b' due prodotti scalari definiti positivi su $\mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente d e d' le distanze indotte (ossia $d(x, y) = \sqrt{b(x-y, x-y)}$ e $d'(x, y) = \sqrt{b'(x-y, x-y)}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$). Dimostrare che $d \sim d'$.

(d) Dimostrare che le metriche

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{per } p \geq 1$$
$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

su $\mathbb{R}^n$ sono tutte equivalenti.

Esercizio 11.
Dimostrare che, in uno spazio metrico, una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2.
Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico ed in esso una palla aperta di raggio 2 che contenga propriamente una palla aperta di raggio 3.