Geometria I

Anno accademico 2013/2014

Esercizi - Foglio 6

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo su un campo algebricamente chiuso e di caratteristica diversa da 2, e $[F]$ una conica non-degenere in $\mathbb{P}(V)$. Dimostrate che il numero delle rette tangenti a $[F]$ passanti per un punto p di $\mathbb{P}(V)$ è 2 se $p \notin \mathbf{V}(F)$ e 1 se $p \in \mathbf{V}(F)$.

Esercizio 2. Sia $[F]$ una conica non-degenere in un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ su un campo di caratteristica diversa da 2, e

$$D := \{L \in \mathbb{P}(V)^\vee \mid L \text{ è tangente a } [F]\}.$$

1. Dimostrate che D è il supporto di una conica non-degenere $[G]$ in $\mathbb{P}(V)^\vee$.
2. Supponete che $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ e identifichiamo $(\mathbb{P}^2)^\vee_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{P}^2)^\vee_{\mathbb{K}} \\ [u_0, u_1, u_2] & \mapsto & \mathbf{V}(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2) \end{array}$$

   Sia $F(X) = X^t \cdot A \cdot X$ dove A è una matrice simmetrica (non-degenere) 3×3, quindi $[F]$ è una conica non-degenere: identificate la G del punto (1).
3. Ripetendo la costruzione con $[G]$ al posto di $[F]$ si ottiene una conica non-degenere $[H]$ in $(\mathbb{P}(V)^\vee)^\vee \cong \mathbb{P}(V)$: dimostrate che $[H]$ è la conica di partenza $[F]$.

Esercizio 3. Siano $\mathbf{P}$ un piano proiettivo *reale* e $[F]$, $[G]$ curve di $\mathbf{P}$.

1. Date esempi in cui l'intersezione tra $\mathbf{V}(F)$ e $\mathbf{V}(G)$ è vuota.
2. Dimostrate che se i gradi di $[F]$ e $[G]$ sono *dispari* allora l'intersezione tra $[F]$ e $[G]$ non è vuota.

Esercizio 4. Dimostrate che esiste un polinomio

$$D \in \mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_n]_{2n-2}$$

con la seguente proprietà: se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0 (in verità la caratteristica può essere arbitraria) e $f = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathbb{K}[x]$ ha grado n allora f ha una radice multipla se e solo se $D(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 0$.

Esercizio 5. Siano $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2 e 3 e $F, G \in \mathbb{K}[X, Y, Z]_3$ definiti da

$$F := X^2Z - Y^2Z + X^3, \qquad G := X^3 - Y^2Z + 2YZ^2 - Z^3.$$

1. Determinate i punti singolari di $[F]$ e $[G]$.
2. Determinate se $[F]$ e $[G]$ sono proiettivamente equivalenti.

Esercizio 6. Sia $[F]$ una superficie cubica in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che l'insieme $\mathrm{Sing}([F])$ dei punti singolari per $[F]$ è un insieme finito. Dimostrate che:

(a) F è irriducibile;

(b) Se $m_p([F]) = 3$, allora $[F]$ è un cono di vertice p e p è l'unico punto singolare di $[F]$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Siano $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ punti non allineati e $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una retta passante per p_1 e non passante né per p_2 né per p_3. Si consideri lo spazio proiettivo $\Lambda_2 = \mathbb{P}(\mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]_2)$ delle coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ e sia $\mathcal{F}$ il suo sottoinsieme definito come

$$\mathcal{F} = \{[F] \in \Lambda_2 \mid p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{V}(F),\ L \text{ è tangente a } [F] \text{ in } p_1\}\,.$$

Dimostrate che $\mathcal{F}$ è un sottospazio proiettivo di Λ_2 e calcolatene la dimensione.

Esercizio 8. Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione almeno 2 su un campo di caratteristica diversa da 2. Siano $H \subset \mathbf{P}$ un iperpiano e $[F]$ una quadrica non degenere in $\mathbf{P}$. Osservate che $H \not\subset \mathbf{V}(F)$ e quindi ha senso la restrizione $[F]|_H$, e dimostrate che $[F]|_H$ è una quadrica degenere di H se e solo se H è tangente a $[F]$ in un punto p. Dimostrare che, in tal caso, l' unico punto singolare della quadrica $[F]|_H$ è p.

Esercizio 9. Sia $[F]$ una quadrica non degenere e non vuota nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.
Dimostrate che vale una delle affermazioni seguenti:

(i) per ogni $p \in \mathbf{V}(F)$, l'insieme $\mathbf{V}(F) \cap \mathbf{T}_p[F]$ è unione di due rette distinte che si intersecano in p;

(ii) per ogni $p \in \mathbf{V}(F)$ si ha che $\mathbf{V}(F) \cap \mathbf{T}_p[F] = \{p\}$.

Esercizio 10. Siano $\mathbb{K}$ un campo di carattersitica diversa da 2 e $[F]$ una quadrica in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$, e supponiamo che $\mathrm{Sing}([F]) = \{p_0\}$. Sia $p \in \mathbf{V}(F)$ un punto liscio e $H := \mathbf{T}_p[F]$: osservate che $H \not\subset \mathbf{V}(F)$ e quindi ha senso la restrizione $[F]|_H$, e dimostrate che $[F]|_H$ è una retta doppia.
