Geometria I

Anno accademico 2013/2014

Esercizi - Foglio 5

Terminologia. Una ipersuperficie in un piano proiettivo è detta *curva (proiettiva)*.

Terminologia. Il *luogo singolare* di una ipersuperficie $[F]$ in uno spazio proiettivo $\mathbf{P}$ è l'insieme

$$\mathrm{Sing}([F]) = \{P \in \mathbf{P} \mid P \text{ è un punto singolare per } [F]\}\,.$$

Esercizio 1.

(a) Dire se le coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ aventi equazioni

$$\begin{aligned} F(X_0,X_1,X_2) &= X_0^2 - X_1^2 + X_1X_2 \\ G(X_0,X_1,X_2) &= X_0X_1 + X_1X_2 + X_0X_2 \\ H(X_0,X_1,X_2) &= X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - 2X_0X_1 + 2X_0X_2 - 2X_1X_2 \end{aligned}$$

sono proiettivamente equivalenti.

(b) Stessa domanda per coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definite dalle medesime equazioni F, G, H.

Esercizio 2.
Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione $n \geq 2$ e sia $[F]$ una ipersuperficie in $\mathbf{P}$ tale che

$$F = u \cdot F_1^{m_1} \cdots F_k^{m_k}$$

è la sua fattorizzazione in primi distinti con $u \in \mathbb{K}^*$.
Dimostrare che un punto $P \in \mathbf{P}$ è singolare per $[F]$ se e solo se vale almeno una delle seguenti condizioni:

(a) esiste j tale che $P \in \mathbf{V}(F_j)$ e $m_j \geq 2$;

(b) esiste j tale che P è un punto singolare per $[F_j]$;

(c) esistono $i \neq j$ tali che $P \in \mathbf{V}(F_i) \cap \mathbf{V}(F_j)$.

Esercizio 3.
Sia $[F]$ una curva nel piano proiettivo $\mathbf{P}$.
Dimostrare che, se F è primo, allora $\mathrm{Sing}([F])$ è un insieme finito.

Esercizio 4.
Sia $\mathcal{I} = [F]$ una ipersuperficie nello spazio proiettivo $\mathbf{P}$ e sia $P \in \mathbf{V}(F)$ un punto. Sia inoltre $H \subset \mathbf{P}$ un iperpiano passante per P non contenuto in $\mathbf{V}(F)$ e sia $\mathcal{I} \cap H = [F|_H]$ l'ipersuperficie dello spazio proiettivo H ottenuta restringendo F (anche detta *intersezione* di $\mathcal{I}$ con H).

(a) Dimostrare che $m_P(\mathcal{I}) \leq m_P(\mathcal{I} \cap H)$.

(b) Dimostrare che $\mathcal{I} \cap H$ è singolare in P se e solo se H è contenuto nello spazio tangente proiettivo $T_P\mathcal{I}$.

(c) Dimostrare che esiste un iperpiano $H' \subset \mathbf{P}$ tale che $m_P(\mathcal{I}) = m_P(\mathcal{I} \cap H')$.

Esercizio 5.
Siano $[F]$ e $[G]$ curve in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definite da

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 + 2X_0^2X_2 + X_0X_2^2 + X_1^2X_2\,,$$
$$G(X_0, X_1, X_2) = X_0^2X_1^2 - X_0X_1X_2^2 - 3X_1^4 - X_0^2X_2^2 - 2X_0X_1^3\,.$$

Determinare i punti singolari per $[F]$, calcolarne la molteplicità e dire se F è primo.
Stesse domande per la curva $[G]$.

Esercizio 6.
Per ogni $n, m \geq 0$ interi con $(n, m) \neq (0, 0)$, sia $[F_{n,m}]$ la curva in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definita da

$$F_{n,m}(X_0, X_1, X_2) = X_1^n X_0^m - X_2^{n+m}\,.$$

Calcolare i punti singolari di $[F_{n,m}]$ e dire per quali coppie (n, m) e (n', m') le curve $[F_{n,m}]$ e $[F_{n',m'}]$ sono proiettivamente equivalenti.

Esercizio 7.
Siano $\mathcal{M}_{n+1,n+1}(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici $(n+1)\times(n+1)$ a entrate in $\mathbb{K}$ e $\mathcal{M}^+_{n+1,n+1}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_{n+1,n+1}(\mathbb{K})$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Assumiamo $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.
Dunque abbiamo l'identificazione

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^+_{n+1,n+1}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_2 \\ A & \mapsto & (X \mapsto X^t \cdot A \cdot X) \end{array}$$

Sia inoltre $[\Phi]$ l'ipersuperficie di $\mathbb{P}(\mathcal{M}^+_{n+1,n+1}(\mathbb{K})) \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_2)$ definita da

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathcal{M}^+_{n+1,n+1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

Quindi $\mathbf{V}(\Phi) \subset \mathbb{P}(\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_2)$ è l'insieme delle quadriche singolari di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

(a) Dimostrare che una quadrica $[q] \in \mathbf{V}(\Phi)$ è un punto singolare di $[\Phi]$ se solo se $\dim \mathrm{Sing}([q]) \geq 1$.

(b) Sia $[q] \in \mathbf{V}(\Phi)$ un punto liscio di $[\Phi]$, e perciò $\mathrm{Sing}[q]$ è un punto (che chiameremo P) per (a). Dimostrate che lo spazio tangente $\mathbf{T}_{[q]}([\Phi])$ è il sottospazio proiettivo delle quadriche il cui supporto contiene P.

(c) Sia $[q] \in \mathbf{V}(\Phi)$ un punto arbitrario.
Quale relazione esiste tra $\dim \mathrm{Sing}([q])$ e la molteplicità $\mathrm{mult}_{[q]}(\Phi)$?

Esercizio 8.
Sia $\mathbf{P}$ un piano proiettivo e $[q]$ una conica liscia, e sia $C := \mathbf{V}(q)$ il supporto di $[q]$. Siano inoltre $P_1, P_2 \in C$ distinti.
Per $i = 1, 2$ sia $\mathbf{St}(P_i)$ la stella delle rette contenenti P_i.
Definiamo $\phi\colon \mathbf{St}(P_1) \to \mathbf{St}(P_2)$ nel modo seguente

$$\phi(L) := \begin{cases} \text{la retta generata da } P_2 \text{ e da } (L \cap C \setminus \{P_1\}) & \text{se } L \neq T_{P_1}[q] \\ \langle P_1, P_2 \rangle & \text{se } L = T_{P_1}[q] \end{cases}$$

Dimostrate che ϕ è una proiettività.

Esercizio 9.
Sia $\mathbf{P}$ un piano proiettivo e siano $P_1, P_2 \in \mathbf{P}$ punti distinti. Sia inoltre $\phi : \mathbf{St}(P_1) \to \mathbf{St}(P_2)$ una proiettività tale che $\phi(\langle P_1, P_2 \rangle) \neq \langle P_1, P_2 \rangle$. Dimostrare che, al variare di $L \in \mathbf{St}(P_1)$, i punti $L \cap \phi(L)$ descrivono il supporto di una conica liscia.
