Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 4

Esercizio 1.
Siano $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $F\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una proiettività. Sia $0 \le m \le n$: dimostrate che esiste un sottospazio proiettivo $L \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ di dimensione m tale che $F(L) = L$.

Esercizio 2.
Siano $p = [1, 1, 1] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la retta di equazione cartesiana

$$X_0 + X_1 - 2X_2 = 0.$$

Sia dia una proiettività $F\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che abbia p come unico punto fisso e L come unica retta che viene mandata in sé stessa da F.

Esercizio 3.
Dimostrate che

$$\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d = \binom{n-1+d}{d}.$$

(Suggerimento: definite la serie formale

$$\varphi_n := \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d) t^d$$

e dimostrate che $\varphi_{a+b} = \varphi_a \cdot \varphi_b$. Poi calcolate φ_1, e da qui φ_n grazie al punto precedente.)

Esercizio 4.
Sia $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e poniamo

$$f := (x_n^2 + g) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

Dimostrate che f è primo se solo se $(-g)$ *non* è un quadrato. Determinate se $f := x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ è primo (la risposta dipende dalla caratteristica di $\mathbb{K}$).

Esercizio 5.
Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3. Siano $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbf{P}$ rette a due a due sghembe. Dimostrate che l'unione delle rette R incidenti L_1, L_2 e L_3 è il supporto di una quadrica, cioè una ipersuperficie di grado 2.

Esercizio 6.
Sia $\mathbf{P}$ un piano proiettivo e $p_1, \ldots, p_5$ punti distinti, e supponete che non ne esistano quattro allineati. Dimostrate che esiste una e una sola conica di $\mathbf{P}$ (cioè una ipersuperficie di grado 2) il cui supporto contiene $p_1, \ldots, p_5$. (Suggerimento: nello spazio proiettivo che parametrizza le coniche di $\mathbf{P}$ l'insieme delle coniche conteneti un punto è....)

Esercizio 7.
Sia $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e poniamo

$$f := (x_n^p + g) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

dove p è un numero primo. Dimostrate che f è primo se solo se g *non* è la potenza p-esima di un polinomio. (Suggerimento. L'applicazione $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}/p} x_n)$ fissa il polinomio f: dedurre che se f non è primo allora è prodotto di fattori di grado 1 nella x_n.)

Esercizio 8.
Sia $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ di grado strettamente positivo e poniamo

$$f := (x_n^2 + g) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]. \tag{1}$$

Dimostrate che se $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ allora l'ipersuperficie $[f]$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è liscia se e solo se lo è l'ipersuperficie $[g]$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Esercizio 9.
Definiamo
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}$$
nel seguente modo: $\frac{d}{dt}|_{t=0} = c$ se e solo se
$$(f - f(0) - ct) \in (t^2).$$
Poniamo $\frac{df(0)}{dt} := \frac{d}{dt}|_{t=0}(f)$. Dimostrate (direttamente) che $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ è lineare e che vale la regola di Leibniz
$$\frac{d(f \cdot g)(0)}{dt} = \frac{df(0)}{dt} \cdot g(0) + f(0) \cdot \frac{dg(0)}{dt}.$$
Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$, con spazio vettoriale associato V. Sia $RA(O; \mathcal{B})$ un sistema di riferimento affine su $\mathbb{T}$, con coordinate affini $(x_1, \ldots, x_n)$. Se $f \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ allora l'isomorfismo $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ permette di dare senso alle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, sono funzioni polinomiali su $\mathbb{T}$, e quindi al loro valore $\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}$ per un punto $p \in \mathbb{T}$. Sia $v \in V$ e siano $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ le sue coordinate nella base $\mathcal{B}$: dimostrate che
$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + tv).$$

Esercizio 10.
Sia $\mathbf{P}$ l'insieme delle coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ e $\mathbf{P}'$ l'insieme delle rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Sia inoltre R una retta fissata in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Dimostrare che l'applicazione $F : \mathbf{P}' \to \mathbf{P}$ che associa ad una retta L l'unica conica avente come divisore associato $L + R$ è un'applicazione proiettiva.

Esercizio 11.
Sia H un iperpiano nello spazio proiettivo $\mathbf{P}$. Dimostrare che la restrizione $r : \mathrm{Div}(\mathbf{P}) \to \mathrm{Div}(\mathbf{P} \setminus \mathbf{H})$ è un omomorfismo con nucleo $\mathbb{Z} \cdot H$. Dimostrare inoltre che l'applicazione $c : \mathrm{Div}(\mathbf{P} \setminus H) \to \mathrm{Div}(\mathbf{P})$ che associa ad un'ipersuperficie in $\mathbf{P} \setminus H$ la sua chiusura in $\mathbf{P}$ è un omomorfismo e $rc = id$, e quindi r è suriettivo.

Esercizio 12.
In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano $\Pi_1 = \{X_3 = 0\}$, il piano $\Pi_2 = \{X_0 + 2X_1 - 3X_2 = 0\}$ e il punto $Q = [0, 1, -1, 1]$; e sia $F : \Pi_1 \to \Pi_2$ la prospettività di centro Q. Si determinino equazioni cartesiane dell'immagine della retta R, ottenuta intersecando il piano Π_1 con il piano di equazione $X_0 + X_1 = 0$.

Esercizio 13.
Sia $\mathbf{P}$ una retta proiettiva (su un campo $\mathbb{K}$) e sia $F : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ una proiettività. Siano inoltre $A, B, C \in \mathbf{P}$ punti distinti tali che $F(A) = A$ e $F(B) = C$.
Dimostrare che A è l'unico punto fisso di $F \iff \beta(A, C, B, F(C)) = -1$.

Esercizio 14.
Sia $[F]$ una ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ di grado dispari.
Dimostrare che il supporto $\mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ contiene infiniti punti.