Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 3

Esercizio 1.
Si determini esplicitamente una proiettività $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con le seguenti proprietà: se $P = [1, 2, 1]$, $P' = [1, 1, 1]$ e L, L', S, S' sono le rette di equazione rispettivamente

$$L : x_0 - x_1 = 0, \qquad L' : x_0 + x_1 = 0,$$
$$S : x_0 + x_1 + x_2 = 0, \qquad S' : x_1 + x_2 = 0,$$

allora $F(L) = L'$, $F(S) = S'$ e $F(P) = P'$. Si dica inoltre se esiste più di una proiettività che verifica le proprietà richieste.

Esercizio 2.
Siano $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ spazi proiettivi della stessa dimensione e $F\colon \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ una proiettività. Dimostrate che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^\vee & \xrightarrow{\mathcal{H}_F} & \mathbf{T}^\vee \\ H & \mapsto & F(H) \end{array}$$

è una proiettività. Dimostrate anche che data una proiettività $\varphi\colon \mathbf{S}^\vee \to \mathbf{T}^\vee$ esiste una e una sola proiettività $F\colon \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ tale che $\varphi = \mathcal{H}_F$.

Esercizio 3.
Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 2. Siano $L_1, \ldots, L_4, L'_1, \ldots, L'_4 \subset \mathbf{P}$ rette.

1. Dimostrate che se non esistono tre rette concorrenti tra le L_i, nè tra le L'_i, allora esiste una e una sola proiettività $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ tale che $F(L_i) = L'_i$ per $i = 1, \ldots, 4$.
2. Supponete che le L_i contengano uno stesso punto e così anche le rette L'_i. È vero che esiste una proiettività $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ tale che $F(L_i) = L'_i$ per $i = 1, \ldots, 4$?

Esercizio 4.
Si dimostri che le seguenti due proposizioni si ottengono l'una dall'altra per dualità.

Proposizione 1. *Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 4. Siano $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbf{P}$ rette a due a due sghembe, e tutte non contenute in uno stesso iperpiano. Allora esiste un'unica retta incidente L_1, L_2 e L_3.*

Proposizione 2. *Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 4. Siano $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \subset \mathbf{P}$ piani tali che l'intersezione di due qualsiasi di essi sia un singolo punto e che la tripla intersezione $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \Lambda_3$ sia vuota. Allora esiste uno e un solo piano che interseca ciascuno dei piani $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ in una retta.*

Esercizio 5.
Sia $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la proiettività definita da $F([x_0, x_1]) = [-x_1, 2x_0 + 3x_1]$.

(a) Si determinino i punti fissi di F.

(b) Se $P = [2, 5] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, si calcoli il birapporto $\beta(A, B, P, F(P))$, dove A e B sono i punti fissi di F.

Esercizio 6.
Siano A, B, C, D punti di un piano proiettivo $\mathbf{P}$ in posizione generale e siano $P = \langle A, B\rangle \cap \langle C, D\rangle$, $Q = \langle A, C\rangle \cap \langle B, D\rangle$, $R = \langle A, D\rangle \cap \langle B, C\rangle$. Si mostri che i punti P, Q, R non sono allineati.

Esercizio 7.
Sia $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ un sistema di riferimento dello spazio proiettivo $\mathbf{P}$ e sia $0 \leq k < n+1$. Siano $L = \langle P_0, P_1, \ldots, P_k \rangle$ e $L' = \langle P_{k+1}, \ldots, P_{n+1} \rangle$ i sottospazi proiettivi generati.

(a) Si dimostri che esiste $R \in \mathbf{P}$ tale che $L \cap L' = \{R\}$.

(b) Si dimostri che $\{P_0, \ldots, P_k, R\}$ è un sistema di riferimento proiettivo per L, e che $\{P_{k+1}, \ldots, P_{n+1}, R\}$ è un sistema di riferimento proiettivo di L'.

Esercizio 8.
Siano L e L' rette distinte di uno spazio proiettivo tridimensionale $\mathbf{P}$ e sia $F : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ una proiettività tale che l'insieme dei punti fissi di F coincida con $L \cup L'$. Per ogni $P \in \mathbf{P} \setminus (L \cup L')$ si denoti con L_P la retta congiungente P e $F(P)$. Si provi che, per ogni $P \in \mathbf{P} \setminus (L \cup L')$, la retta L_P interseca sia L che L'.

Esercizio 9.
Sia $\mathbf{P}$ una retta proiettiva e sia $F : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ una funzione iniettiva tale che $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(F(P_1), F(P_2), F(P_3), F(P_4))$ per ogni quaterna P_1, P_2, P_3, P_4 di punti distinti di $\mathbf{P}$. Si mostri che F è una proiettività.

Esercizio 10.
Siano A, B punti distinti di una retta proiettiva $\mathbf{P}$. Si provi che esiste un'unica applicazione lineare $F : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ diversa dall'identità che abbia A e B come punti fissi e tale che $F \circ F = Id_{\mathbf{P}}$.

Esercizio 11.
Sia $\mathbf{P}$ un piano proiettivo, $L_1, L_2 \subset \mathbf{P}$ rette distinte e P l'unico punto d'intersezione di L_1 e L_2. Si mostri che un isomorfismo proiettivo $F : L_1 \to L_2$ è una prospettività se e solo se $F(P) = P$.

Esercizio 11'.
Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo, $H_1, H_2 \subset \mathbf{P}$ iperpiani distinti e $L = H_1 \cap H_2$. Si mostri che un isomorfismo proiettivo $F : H_1 \to H_2$ è una prospettività se e solo se $F(P) = P$ per ogni $P \in L$.