Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 2

Esercizio 1.
Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 4. Siano $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbf{P}$ rette (proiettive) a due a due sghembe e non contenute in uno stesso iperpiano. Dimostrate che esiste un'unica retta incidente L_1, L_2 e L_3, cioè una retta che abbia intersezione non vuota con L_1, L_2 e L_3.

Esercizio 2.
Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 4. Siano $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \subset \mathbf{P}$ piani tali che l'intersezione di due qualsiasi di essi sia un singolo punto e che la tripla intersezione $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \Lambda_3$ sia vuota. Dimostrate che esiste uno e un solo piano che interseca ciascuno dei piani $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ in una retta.

Esercizio 3.
Sia $\mathbb{K}$ un campo e $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{K}$. Per $i = 0, \ldots, 3$ sia $P_i := [1, a_i, a_i^2]. \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$.
Verificate che $P_0, \ldots, P_3$ sono in posizione generale se e solo se $a_0, \ldots, a_3$ sono distinti.

Esercizio 4.
Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2 e da 3. Siano $P_0, \ldots, P_3, Q \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ i punti

$$P_0 := [1,0,0], \qquad P_1 := [1,1,1], \qquad P_2 := [1,-1,1], \qquad P_3 := [1,2,4], \qquad Q := [4,2,1].$$

1. Verificate che $P_0, \ldots, P_3$ sono in posizione generale (potete invocare l'Esercizio 1).
2. Determinate le coordinate di Q nel riferimento proiettivo $\mathcal{R}(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

Esercizio 5.
Sia $\mathbf{P}$ una retta proiettiva e $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbf{P}$ con $\{P_1, P_2\} \cap \{P_3, P_4\} = \emptyset$.

1. Dimostrate che esiste $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{P})$ che scambia P_1 con P_2 e P_3 con P_4, cioè tale che
$$F(P_1) = P_2, \qquad F(P_2) = P_1, \qquad F(P_3) = P_4, \qquad F(P_4) = P_3.$$
2. Dimostrate che, se c'è al più una ripetizione tra i punti $P_1, \ldots, P_4$, allora una F che scambi P_1 con P_2 e P_3 con P_4 è unica ed è un'involuzione, ossia $F \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{P}}$.

Esercizio 6.
Sia $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$.

1. Dimostrate che, se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, allora esiste un *punto fisso* di F, ossia un punto $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tale che $F(P) = P$.
2. Date un esempio di una $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$ che *non* abbia punti fissi.
3. Sia n pari e $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$. Dimostrate che esiste un *punto fisso* di F.

Esercizio 7.
Sia $\mathbf{P}$ una retta proiettiva e $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbf{P}$ tali che non esistano tre indici i cui punti corrispondenti siano uguali. Sia $\alpha := \beta(P_1, \ldots, P_4)$ il loro birapporto. Si verifichi che l'insieme dei valori di $\beta(P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(4)})$ al variare di $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ (il gruppo delle permutazioni di $\{1,2,3,4\}$) è uguale a

$$\left\{\alpha, \quad \alpha^{-1}, \quad 1-\alpha, \quad \frac{1}{1-\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1}, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha}\right\}.$$