Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 10

Esercizio 1.
Dimostrare oppure dare un controesempio.

(a) Se X è a base numerabile e $Y \subset X$, allora Y è a base numerabile.

(b) Se X e Y sono a base numerabile, allora $X \times Y$ è a base numerabile.

(b') Se X e Y hanno la proprietà (N1), allora anche $X \times Y$ ha la proprietà (N1).

(c) Se X_i è a base numerabile per ogni $i \in I$, allora $X := \coprod_{i \in I} X_i$ è a base numerabile.

(c') Se X_i è (N1) per ogni $i \in I$, allora $X := \coprod_{i \in I} X_i$ è (N1).

(d) La retta di Sorgenfrey (ossia $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey che ha base data da aperti della forma $[a, b)$) ha la proprietà (N1).

(e) Sia X uno spazio topologico a base numerabile e sia $\mathcal{B}$ una base qualunque. Dimostrare che esiste una base numerabile $\mathcal{B}'$ di X contenuta in $\mathcal{B}$.

(f) Se X è a base numerabile e $f : X \to Y$ è continua e aperta, allora anche $f(X)$ è a base numerabile. Stessa domanda senza assumere f aperta.

Esercizio 2.
Dimostrare oppure dare un controesempio.

(a) Se X e Y hanno un sottoinsieme denso numerabile, allora $X \times Y$ ha un sottoinsieme denso numerabile.

(b) Se X ha un sottoinsieme denso numerabile e $Y \subset X$, allora Y ha un sottoinsieme denso numerabile.

(c) La retta di Sorgenfrey (ossia $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey che ha base data da aperti della forma $[a, b)$) ha un sottoinsieme denso numerabile.

(d) Il prodotto di due rette di Sorgenfrey ha un sottoinsieme denso e numerabile.

(e) La retta di Sorgenfrey è a base numerabile. *(Sugg.: considerare il prodotto di due rette di Sorgenfrey.)*

(f) Se X ha un sottoinsieme denso numerabile e $f : X \to Y$ è continua, allora $f(X)$ ha un sottoinsieme denso numerabile.

Esercizio 3.
Dire se le seguenti affermazioni sono vere e giustificare la risposta.

(a) $\mathbb{R} \times [0, 1]$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

(b) Il cilindro aperto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ è omeomorfo al cilindro chiuso $\overline{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.
Dimostrare che un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi X, Y compatti di Hausdorff è continua se e solo se il grafico di f è chiuso nel prodotto $X \times Y$.

Definizione. *Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* **propria** *se, per ogni compatto $K \subseteq Y$, la controimmagine $f^{-1}(K)$ è compatta.*

Definizione. *Uno spazio topologico X si dice* **localmente compatto** *se ogni suo punto possiede un intorno compatto.*

Esercizio 5.
Dimostrare che, se Y è di Hausdorff e localmente compatto, ogni applicazione continua e propria $f : X \to Y$ è chiusa.

Esercizio 6.
Sia $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ una bigezione tra i numeri naturali ed i numeri razionali e considerarla come una successione $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ di numeri reali. Determinare i punti di accumulazione della successione $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.
Sia $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e definiamo $\tau^c \subset \mathcal{P}(X)$ in modo tale che un sottoinsieme $C \subset X$ appartiene a τ se e solo se $(0,0) \in C$ oppure $C \cap (\{n\} \times \mathbb{N})$ è infinito per al più finiti valori di n.

(a) Dimostrare che τ^c è l'insieme dei chiusi di una topologia su X.

(b) Dimostrare che il punto $(0,0) \in X$ è di accumulazione per una qualche successione contenuta in $A = X \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Dimostrare che nessuna successione contenuta in $A = X \setminus \{(0,0)\}$ converge a $(0,0)$.

Esercizio 8.
Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \to X$ un'**isometria**, ossia un'applicazione tale che $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

(a) Dire se f è necessariamente iniettiva.

(b) Dire se f è necessariamente suriettiva.

(c) Dire se f è necessariamente un omeomorfismo.

(c') Dire se, supponendo X compatto, f è necessariamente un omeomorfismo.

Esercizio 9.
Sia $V = \mathbb{R}^{n+1}$ e sia $\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ la proiezione $\pi(v) = [v]$.

(a) Dimostrare che π è continua, dove V è munito della topologia euclidea classica e $\mathbb{P}(V)$ è munito della topologia classica.

(b) Considerare la sfera $S^n \subset V$ e usare π per dimostrare che $\mathbb{P}(V)$ è compatto.

(c) Se d è la distanza su S^n indotta dalla distanza di $\mathbb{R}^{n+1}$, definire un'applicazione $\bar{d} : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{R}$ come
$$\bar{d}(L, L') := \inf\{d(v, w) \,|\, v \in L,\ w \in L'\}$$
Dimostrare che $\bar{d}$ è una distanza su $\mathbb{P}(V)$ e che induce la topologia classica.

(d) Dimostrare che $\mathbb{P}(V)$ è a base numerabile.

(e) Ripetere i passi precedenti (con le dovute variazioni) nel caso dello spazio vettoriale complesso $W = \mathbb{C}^{n+1}$.

Esercizio 10.

(a) Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ è localmente compatto. Esibire uno spazio metrico che non è localmente compatto.

(b) Dimostrare che il prodotto di due spazi localemente compatti è localmente compatto.

(c) Dimostrare che, se X è localmente compatto e $Y \subseteq X$ è chiuso, allora Y è localmente compatto.

(d) Sia X uno spazio di Hausdorff e sia K un intorno compatto di $x \in X$. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{J}$ degli intorni compatti di x contenuti in K è un sistema fondamentale di intorni di x.

(e) Sia X localmente compatto. Dimostrare che, per ogni $K \subset X$ compatto, c'è un altro compatto $H \subseteq X$ tale che $K \subset H^\circ$.