Geometria I

Anno 2013/2014

Esercizi - Foglio 1

Esercizio 1.
Verificate che i punti

$$[a_0, a_1, a_2],\ [b_0, b_1, b_2],\ [c_0, c_1, c_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$$

sono allineati se e solo se

$$0 = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}.$$

A partire da questo risultato ottenete un criterio necessario e sufficiente perchè punti del piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ siano allineati.

Esercizio 2.
Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo su $\mathbb{K}$ di dimensione 3. Siano $L_1, L_2 \subset \mathbf{P}$ due rette shembe, cioè disgiunte. Sia $p \in (\mathbf{P} \setminus L_1 \setminus L_2)$. Dimostrate che esiste una e una sola retta R contente p e incidente sia L_1 che L_2 (incidente L_i vuol dire che ha intersezione non vuota con L_i).

Esercizio 3.
Siano $A_1, A_2 \subset (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$ le rette affini di equazioni cartesiane

$$A_1 :\ 3x_1 + 2x_2 - 1 = 0, \qquad A_2 :\ 3x_1 + 2x_2 + 5 = 0.$$

(Come di consueto identifichiamo gli spazi affini $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$ e $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.)

1. Date equazioni cartesiane omogenee di $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$.
2. Determinate il punto d'intersezione tra $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$.

Esercizio 4.
Sia p un numero primo.

(a) Calcolare il numero dei punti in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

(b) Calcolare il numero delle rette proiettive in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Esercizio 5.
Sia p un numero primo. Calcolate la cardinalità di $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p})$ e il numero delle proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ che fissano un punto assegnato. Se $p = 2, 3$ i gruppi $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p})$ sono isomorfi a gruppi ben noti: quali?

Esercizio 6.
Sia p un numero primo e $\mathbb{F}_p$ un campo con p elementi.

(a) Calcolare il numero delle proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ che fissano $[1 : 0 : 0]$.

(b) Calcolare il numero delle proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ che fissano un punto assegnato $q \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$.

Esercizio 7.
Si mostri che i punti del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$$\left[\frac{1}{2}, 1, 1\right], \quad \left[1, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right], \quad [2, -1, 2]$$

sono allineati, e si determini un'equazione cartesiana omogenea della retta proiettiva che li contiene.

Esercizio 8.
Si determinino i valori di $a \in \mathbb{C}$ per cui le rette proiettive di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ aventi equazioni cartesiane

$$ax_1 + aix_2 + 3ix_0 = 0, \quad iax_0 + x_1 + aix_2 = 0, \quad 3ix_2 + 5x_0 + x_1 = 0$$

sono concorrenti (cioè abbiano un punto in comune).

Esercizio 9.
Sia $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ la retta proiettiva di equazione $x_0 + x_1 = 0$. Siano $\alpha, \beta : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus L \longrightarrow \mathbb{K}^2$ definite da

$$\begin{aligned} \alpha([x_0 : x_1 : x_2]) &= \left(\frac{x_1}{x_0 + x_1}, \frac{x_2}{x_0 + x_1}\right), \\ \beta([x_0 : x_1 : x_2]) &= \left(\frac{x_0}{x_0 + x_1}, \frac{x_2}{x_0 + x_1}\right). \end{aligned}$$

Si calcoli $\alpha \circ \beta^{-1}$ e si verifichi che tale mappa è un'affinità.

Esercizio 10.
Siano L e L' rette proiettive in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ definite da

$$\begin{aligned} L &= \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \,|\, x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0\}, \\ L' &= \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \,|\, 2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0\}, \end{aligned}$$

e sia $p = [0 : 1 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Determinare equazioni cartesiane dell'unica retta proiettiva $L'' \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ passante per p che interseca L e L'.

Esercizio 11.
Dimostrate che il gruppo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ è generato dalle immagini dei seguenti sottogruppi (abeliani) di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, \mathbb{K} \ni a \neq 1\right\}, \qquad \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \,|\, c \in \mathbb{K}\right\}, \qquad \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$