TOPOLOGIA - APPUNTI SETTIMANA 16/12/2013 - 19/12/2013

KIERAN G. O'GRADY - 16 DICEMBRE 2013

1. Compattezza di prodotti

Dimostreremo che il prodotto di spazi compatti è compatto. Come applicazione si dimostrerà che un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Proposizione 1.1. *Siano X, Y spazi topologici compatti. Allora $X \times Y$ è compatto.*

Dimostrazione. Siccome una base di $X \times Y$ è data dalla famiglia dei prodotti $U \times V$ con $U \subset X$ e $V \subset Y$ aperti, è sufficiente dimostrare che un ricoprimento $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ di $X \times Y$ con $U_i \subset X$ e $V_i \subset Y$ aperti per ogni $i \in I$ ha un sottoricoprimento finito. Sia $x \in X$. Il ricoporimento aperto di $\{x\} \times Y$ dato da $\{(U_i \times V_i) \cap (\{x\} \times Y)$ ha un sottoricoprimento finito perchè $\{x\} \times Y$ è omeomorfo a Y e quindi compatto. Perciò esiste $J(x) \subset I$ *finito* tale che

$$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i \in J(x)} U_i \times V_i.$$

Possiamo assumere che $U_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in J(x)$. Sia

$$W_x := \bigcap_{i \in J(x)} U_i. \tag{1.1}$$

Allora W_x è una intersezione finita di aperti contenenti x (ricordimao che $U_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in J(x)$), e quindi W_x è un aperto contenente x. Quindi $\{W_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X, e siccome X è compatto ha un sottoricoprimento finito $\{W_{x_1}, \ldots, W_{x_n}\}$. Finiremo dimostrando che

$$\{U_i \times V_i\}_{i \in J(x_1)} \cup \{U_i \times V_i\}_{i \in J(x_2)} \cup \ldots \cup \{U_i \times V_i\}_{i \in J(x_n)}$$

è un ricoprimento di $X \times Y$. Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$: dobbiamo dimostrare che esistono $1 \leq s \leq n$ e $i \in J(x_s)$ tali che $(\overline{x}, \overline{y}) \in (U_i \times V_i)$. Esiste $1 \leq s \leq n$ tale che $\overline{x} \in W_{x_s}$, ed esiste $i \in J(x_s)$ tale che $(x_s, \overline{y}) \in (U_i \times V_i)$, cioè $x_s \in U_i$ e $\overline{y} \in V_i$. Siccome $W_{x_s} \subset U_i$ (vedi (1.1)) abbiamo che $\overline{x} \in U_i$ e quindi $(\overline{x}, \overline{y}) \in (U_i \times V_i)$. □

Una immediata conseguenza della **Proposizione 1.1** è il seguente risultato.

Corollario 1.2. *Se $X_1, \ldots, X_n$ sono spazi topologici compatti allora il prodotto $X_1 \times \ldots \times X_n$ è compatto.*

Proposizione 1.3. *Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio. Supponimao che X sia compatto. Siccome $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff X è chiuso, e considerando il ricoprimento aperto $\{B(0,n) \cap X\}_{\in \mathbb{N}_+}$ di X vediamo che X è limitato. Ora supponimao che X sia chiuso e limitato. Allora esiste $r > 0$ tale che $X \subset [-r, r]^n$. Il prodotto di compatti $[-r, r]^n$ è compatto per il **Corollario 1.2**; siccome X è chiuso in $[-r, r]^n$ segue che è compatto. □

2. Compattezza per successioni

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di uno spazio topologico X: una sua *sottosuccessione* è data da una successione $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dove $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \ldots$, cioè $i_k = \varphi(k)$ dove $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è un'applicazione strettamente crescente.

Definizione 2.1. Uno spazio topologico X è *compatto per successioni* se ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di X ha una sottosuccessione convergente.

Esempi 2.2. (1) Sia $X \subset \mathbb{R}$. Allora X è compatto per successioni se e solo se è compatto. Infatti se X è compatto per successioni allora è limitato (altrimenti esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di X con $|x_n| \to \infty$, e quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni convergenti) e chiuso (se x è nella chiusura di X esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di X con $x_n \to x$, e quindi ogni sua sottosuccessione converge a x, perciò $x \in X$). Viceversa se X è chiuso e limitato è un chiuso in $[-r, r]$ per un qualche $r > 0$; il classico argomento delle bisezioni successive dimostra che $[-r, r]$ è compatto per successioni, e quindi anche X.
(2) Esistono spazi topologici compatti ma non compatti per successioni (vedi l'esercizio 7.13 di [1]), e spazi compatti per successioni ma non compatti (vedi l'esercizio 7.14 di [1]).

Osservazione 2.3. Lasciamo al lettore il compito di dimostrare i seguenti analoghi di risultati che abbiamo dimostrato per la compattezza "tout court".

(1) Un chiuso in uno spazio compatto per successioni è compatto per successioni.
(2) Se X e Y sono spazi topologici compatti per successioni, allora $X \times Y$ i è compatto per successioni.
(3) Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua di spazi topologici, e X è compatto per successioni, allora $f(X)$ è compatto per successioni.
(4) Se X è compatto per successioni e $f : X \to \mathbb{R}$ è un'applicazione continua, allora f ha massimo e minimo.

Osservazione 2.4. Dal primo degli **Esempi 2.2** e dal (2) dell' **Osservazione 2.3** segue che se $r > 0$ allora $[-r, r]^n$ è compatto per successioni. Ne segue facilmente che $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto per successioni se e solo se è compatto.

Ci poniamo il problema: sotto quali ipotesi la compattezza equivale alla compattezza per successioni? Cominciamo dando una definizione.

Definizione 2.5. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di uno spazio topologico X. Un punto $x \in X$ è di *accumulazione* per $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dato un qualsisasi intorno U di x esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che $x_n \in U$.

Esempi 2.6. (1) Se $x_n \to x$ allora x è un punto di accumulazione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; se X è di Hausdorff allora x è l'unico punto di accumulazione.
(2) La successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha -1 e 1 come punti di accumulazione. Notate che $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite.
(3) Ordinando l'insieme dei razionali otteniamo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ che ha ogni reale come punto di accumulazione.

Proposizione 2.7. *Se X è uno spazio topologico compatto allora ogni successione in X ha punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Per assurdo. Supponimao che la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non abbia punti di accumulazione. Sia $p \in X$: siccome p non è punto di accumulazione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esistono $n(p) \in \mathbb{N}$ e un intorno aperto U_p di p tali che

$$x_n \notin U_p \text{ se } n \geq n(p). \tag{2.2}$$

Esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_s}\}$ del ricoprimento aperto $\{U_p\}_{p\in X}$ di X perchè X è compatto. Sia

$$n \geq \max\{n(p_1), \ldots, n(p_s)\}.$$

Allora $x_n \notin (U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_s})$ e questo è assurdo perchè $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_s}\}$ è un ricoprimento di X. $\square$

Proposizione 2.8. *Uno spazio topologico compatto X che soddisfa al primo assioma di numerabilità è compatto per successioni.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di X. Per la **Proposizione 2.7** esiste un punto di accumulazione x di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x: possiamo assumere che $U_m \supset U_{m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ (partiamo da un sistema fondamentale di intorni $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ di x, e passiamo al sistema fondamentale di intorni $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dove $U_m := V_0 \cap \ldots \cap V_m$). Per ogni $m \in \mathbb{N}$ scegliamo $n(m) \in \mathbb{N}$ con la seguente procedura induttiva. Siccome x è un punto di accumulazione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esiste $n(0)$ tale che $X_{n(0)} \in U_0$. Ora supponiamo che sia stato definito $n(m)$ e definiamo $n(m+1)$. Siccome x è un punto di accumulazione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esistono infiniti n tali che $x_n \in U_{m+1}$, quindi esiste $n(m+1)$ tale che $x_{n(m+1)} \in U_{m+1}$ e $n(m+1) > n(m)$. La sottosuccessione $\{x_n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a x perchè $x_{n(k)} \subset U_m$ per ogni $k \geq m$ (ricordate che $U_m \supset U_{m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$). □

Proposizione 2.9. *Uno spazio topologico X che ha una base numerabile è compatto se e solo se è compatto per successioni.*

Dimostrazione. Lo spazio X soddisfa al primo assioma di numerabilità perchè ha una base numerabile, e quindi la **Proposizione 2.8** dà che se è compatto allora è compatto per successioni. Ora supponiamo che X sia compatto per successioni e dimostriamo che è compatto. Supponimao per assurdo che X non sia compatto. Siccome X ha una base numerabile esiste un ricorpimento aperto numerabile $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ che non ha sottricoprimenti finiti. Inoltre eleiminando alcuni degli U_i possiamo supporre che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} \not\subset (U_0 \cup \ldots \cup U_n).$$

Per $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in (U_{n+1} \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n)$. Siccome X è compatto per successioni esiste una sottosuccessione $\{x_{n(k)}\}$ covergente a $x \in X$. Esiste m tale che $x \in U_m$ e quindi $x_{n(k)} \in U_m$ per $k \gg 0$, e quindi anche con $n(k) \geq m$, contraddicendo la scelta degli x_n. □

3. Il Teorema fondamentale dell'Algebra

Daremo una dimostrazione topologica del seguente classico risultato.

Teorema 3.1 (Teorema fondamentale dell'Algebra)**.** *Un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ di grado n strettamente positivo si fattorizza completamente, cioè esistono $c, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ tali che*

$$p = c(x - \xi_1) \cdot (x - \xi_2) \cdot \ldots \cdot (x - \xi_n).$$

Dimostreremo il Teorema fondamentale dell'Algebra dopo aver dato una serie di risultati preliminari. Prima di tutto notiamo che è sufficiente dimostrare che esiste una radice complessa di p, cioè $\xi \in \mathbb{C}$ tale che $p(\xi) = 0$: infatti per il Teorema di Ruffini segue che $p = (x-\xi)\cdot q$ dove q è un polinomio di grado $(n-1)$, e il Teorema segue per induzione su n (se $n = 1$ il risultato è banalmente vero). Quindi il nostro scopo sarà dimostrare che esiste una radice complessa di p. Scriviamo

$$p = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_0 \neq 0.$$

A partire da p possiamo definire un'applicazione $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ponendo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ [X, Z] & \mapsto & [a_0X^n + \ldots + a_iX^{n-i}Z^i + \ldots + a_nZ^n, Z^n]. \end{array} \tag{3.3}$$

Notate che φ è ben definita perchè se $[X, Z]$ viene sostituito da $[\lambda X, \lambda Z]$, dove $\lambda \in \mathbb{C}^*$, allora $[a_0X^n + \ldots + a_nZ^n, Z^n]$ viene sostituito da $[\lambda^n(a_0X^n + \ldots + a_nZ^n), \lambda^nZ^n]$. Siano $\mathbb{P}^1_Z, \mathbb{P}^1_X \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ i sottospazi affini

$$\mathbb{P}^1_Z := \{[X, Z] \mid Z \neq 0\}, \quad \mathbb{P}^1_X := \{[X, Z] \mid X \neq 0\}.$$

Quindi

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1_Z \cup \mathbb{P}^1_X \tag{3.4}$$

Abbiamo isomorfismi di spazi affini

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1_Z & \qquad & \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1_X \\ x & \mapsto & [x,1] & & z & \mapsto & [1,z] \end{array} \tag{3.5}$$

con inverse dati da $[X,Z] \mapsto X/Z$ e $[X,Z] \mapsto Z/X$ rispettivamente. Notiamo che

$$\varphi(\mathbb{P}^1_Z) \subset \mathbb{P}^1_Z, \qquad \varphi([1,0]) = [1,0]. \tag{3.6}$$

Inoltre, ponendo $Z = 1$ nella (3.3), vediamo che la restrizione di φ a $\mathbb{P}^1_Z$ dà un'applicazione $\mathbb{P}^1_Z \to \mathbb{P}^1_Z$ che (tenendo conto della prima identifcazione in (3.5)) è identificata con l'applicazione polinomiale definita da p. Per dimostrare che esiste una radice complessa di p studieremo l'applicazione p. Dotiamo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ della *topologia euclidea.* Il seguente risultato sarà un ingrediente della dimostrazione.

Proposizione 3.2. *Sia $\mathbb{K}$ il campo reale o complesso. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ con la topologia euclidea è compatto.*

Dimostrazione. L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} S^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \\ (x_0,\ldots,x_n) & \mapsto & [x_0,\ldots,x_n] \end{array}$$

è continua e suriettiva. Siccome S^{n+1} è compatto segue che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è compatto. Analogamente, notiamo che se identifichiamo $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ nel modo standard, abbiamo che sia

$$S^{2n+1} = \{(z_0,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} |z_i|^2 = 1\},$$

e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \\ (z_0,\ldots,z_n) & \mapsto & [z_0,\ldots,z_n] \end{array}$$

è continua e suriettiva. Siccome S^{2n+1} è compatto segue che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è compatto. □

Come primo passo dimostreremo che φ è continua. Ricordiamo che $\mathbb{P}^1_X$ e $\mathbb{P}^1_Z$ sono aperti per la topologia euclidea su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e che, se dotiamo $\mathbb{P}^1_Z$ e $\mathbb{P}^1_X$ della topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, allora le applicazioni (3.5) sono omeomorfismi (come al solito $\mathbb{C}$ è dotato della topologia euclidea).

Lemma 3.3. *Siano X uno spazio topologico e $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se e solo se $A \cap U_i$ è aperto per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Se A è aperto $A \cap U_i$ è aperto perchè intersezione di aperti. Supponiamo che $A \cap U_i$ sia aperto per ogni $i \in I$: siccome $A = \bigcup_{i\in I}(A \cap U_i)$, vediamo che A è unione di aperti e quindi è aperto. □

Proposizione 3.4. *L'applicazione φ definita da* (3.3) *è continua.*

Dimostrazione. La (3.4) dà un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, quindi per il **Lemma 3.3** basterà dimostrare che se $A \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è aperto allora $\varphi^{-1}A \cap \mathbb{P}^1_Z$ e $\varphi^{-1}A \cap \mathbb{P}^1_X$ sono aperti. Per la (3.6) si ha che $\varphi^{-1}A \cap \mathbb{P}^1_Z = \varphi^{-1}(A \cap \mathbb{P}^1_Z)$, e siccome la restrizione di φ a $\mathbb{P}^1_Z$ è identificata con l'applicazione polinomiale p, che è continua per la topologia euclidea, segue che $\varphi^{-1}A \cap \mathbb{P}^1_Z$ è aperto. Se $[1,0] \notin A$ non rimane nulla da dimostrare, se invece $[1,0] \notin A$ rimane da dimostrare che $\varphi^{-1}A$ contiene un intorno aperto di $[1,0]$ (giacchè $\mathbb{P}^1_Z \cap \mathbb{P}^1_X$ è aperto). Siccome A è aperto e contiene $[1,0]$ esiste $R \gg 0$ tale che

$$A \supset \{[X,Z] \mid |X/Z| > R\}.$$

Quindi basterà dimostrare che esiste $T \gg 0$ tale che

$$\text{se } |x| > T \text{ allora } |p(x)| > R.$$

Scrivendo $p(x) = a_0x^n(1 + (a_1/a_0)x^{-1} + \ldots + (a_n/a_0)x^{-n})$ e notando che

$$1 + (a_1/a_0)x^{-1} + \ldots + a_nx^{-n}$$

tende a 1 per $|x|$ che tende a $+\infty$ si vede subito che esiste un tale T. □

Corollario 3.5. *Esiste un $x \in \mathbb{C}$ che minimizza il valore assoluto di $p(x)$, cioè esiste*

$$\min\{|p(x)| \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

.

Dimostrazione. Siccome φ è continua e $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (con la topologia euclidea) è compatto (vedi la **Proposizione 3.2**) l'immagine $\operatorname{Im}\varphi$ è compatto in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, siccome $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è di Hausdorff segue che $\operatorname{Im}\varphi$ è chiuso. Per $R > 0$ sia $\overline{B}(0,R) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq R\}$. Esiste $R > 0$ tale che $\overline{B}(0,R) \cap \operatorname{Im} p \neq \emptyset$. Allora

$$\emptyset \neq \operatorname{Im}\varphi \cap \overline{B}(0,R) = \operatorname{Im} p \cap \overline{B}(0,R)$$

è chiuso, e siccome $\overline{B}(0,R)$ è chiuso e compatto segue che $\operatorname{Im} p \cap \overline{B}(0,R)$ è compatto (e non vuoto). Siccome la funzione $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $w \mapsto |w|$ è continua segue che ha minimo su $\operatorname{Im} p \cap \overline{B}(0,R)$, e questo è il minimo cercato. □

Ora siamo pronti a dimostrare che p ha una radice complessa. Ragioniamo per assurdo: supponiamo che p non abbia radici complesse. Per il **Corollario ??** esiste $x_0 \in \mathbb{C}$ tale che

$$0 < |p(x_0)| = \min\{|p(x)| \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

Scriviamo $p(x_0) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Moltiplicando p per $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$ otteniamo un polinomio q che ha gli stessi valori assoluti, e quindi $\rho = |q(x_0)| = |p(x_0)|$ minimizza il valore assoluto di q: notate che $q(x_0) = \rho$. Scrviamo

$$q(x) = \rho + b_m(x - x_0)^m + b_{m+1}(x - x_0)^{m+1} + \ldots + b_n(x - x_0)^n, \qquad m > 0, \quad b_m \neq 0. \tag{3.7}$$

Ogni numero complesso ha radici m-esime: sia μ una radice m-esima di b_m. Sostituendo $b_m = \mu^m$, $y = \mu x$ e $y_0 = \mu x_0$ nella (3.7) otteniamo un polinomio

$$r(y) = \rho + (y - y_0)^m + c_{m+1}(y - y_0)^{m+1} + \ldots + c_n(y - y_0)^n, \qquad m > 0, \quad b_m \neq 0$$

tale che ρ è il minimo dei valori assoluti $|r(y)|$. Sia ζ_m tale che $\zeta_m^m = -1$; per $t > 0$ poniamo

$$y(t) := y_0 + \zeta_m t.$$

È facile vedere che se $t > 0$ è sufficientemente piccolo allora

$$\begin{aligned} |r(y(t))| &= |\rho - t^m + c_{m+1}(\zeta_m t)^{m+1} + \ldots + c_n(\zeta_m t)^n| = \\ &= |\rho - t^m(1 + c_{m+1}\zeta_m t + \ldots + c_n\zeta_m^{n-m}t^{n-m})| < \rho \end{aligned} \tag{3.8}$$

e questo contraddice l'ipotesi.

Riferimenti bibliografici

1. M. Manetti, *Topologia*, Springer (2008).