Hessiana e flessi di una curva algebrica piana

Assumiamo $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso di $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$.

Definizione 0.1. Sia $\mathbf{P}$ un piano proiettivo, sia $[F]$ una curva in $\mathbf{P}$ e sia $P \in \mathbb{V}(F)$ un punto liscio per $[F]$. Diciamo che P è un **flesso** di $[F]$ se la retta tangente $L = T_P[F]$ soddisfa $\mathrm{mult}_P(L \cdot [F]) \geq 3$. In tal caso, il flesso P si dice **ordinario** se $\mathrm{mult}_P(L \cdot [F]) = 3$.
Analogamente: sia $\mathbf{A}$ un piano affine, sia $[f]$ una curva in $\mathbf{A}$ e sia $p \in V(f)$ un punto liscio per $[f]$. Diciamo che p è un **flesso** di $[f]$ se la retta tangente $\ell = T_p[f]$ soddisfa $\mathrm{mult}_p(\ell \cdot [f]) \geq 3$. In tal caso, il flesso p si dice **ordinario** se $\mathrm{mult}_p(\ell \cdot [f]) = 3$.

Esempio 0.2. Sia $\mathbf{P} = \mathbb{P}^{\mathbf{2}}_{\mathbb{K}}$, sia $F_d(X_0, X_1, X_2) = X_0^d - X_1^d - X_2^d$. Allora il punto $P = [1, 1, 0]$ è un flesso per $[F_d]$ se e solo se $d \geq 3$. Tale flesso è ordinario se e solo se $d = 3$.

Definizione 0.3. Data la curva $[\Phi]$ di grado d in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ (dove quindi $\Phi \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ è un polinomio non nullo, omogeneo di grado totale $d \geq 1$) definiamo il **polinomio hessiano** $H_\Phi \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ di Φ come

$$H_\Phi(X_0, X_1, X_2) := \det \mathcal{H}_\Phi, \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}_\Phi := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_0^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_0 \partial X_1} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_0 \partial X_2} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1 \partial X_0} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_2 \partial X_0} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_2 \partial X_1} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_2^2} \end{pmatrix}$$

Se $H_\Phi \neq 0$, allora $[H_\Phi]$ si dice **curva hessiana** associata a $[\Phi]$ e ha grado $3(d-2)$.

L'omogeneità del polinomio Φ consente di dimostrare la seguente formula alternativa per H_Φ.

Lemma 0.4. *Se* $[\Phi]$ *è una curva di grado* d *in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, *allora*

$$X_0^2 \cdot H_\Phi(X_0, X_1, X_2) = \det \begin{pmatrix} d(d-1)\Phi & (d-1)\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_1} & (d-1)\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_2} \\ (d-1)\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_1} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1 \partial X_2} \\ (d-1)\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_2 \partial X_1} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_2^2} \end{pmatrix}$$

Proof. Consideriamo la matrice

$$\mathcal{H}_\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \Phi_{02} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{20} & \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}$$

dove Φ_i denota $\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_i}$ e Φ_{ij} denota $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i \, \partial X_j}$.

Moltiplichiamo la prima riga di $\mathcal{H}_\Phi$ per X_0 e poi sommiamo alla prima riga X_1 volte la seconda e X_2 volte la terza riga. Otteniamo la matrice seguente

$$\begin{pmatrix} X_0\Phi_{00} + X_1\Phi_{01} + X_2\Phi_{02} & X_0\Phi_{10} + X_1\Phi_{11} + X_2\Phi_{12} & X_0\Phi_{20} + X_1\Phi_{21} + X_2\Phi_{22} \\ \Phi_{01} & \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{02} & \Phi_{12} & \Phi_{22} \end{pmatrix}$$

il cui determinante è uguale a $X_0 \cdot H_\Phi$. Dall'omogeneità di Φ (che ha grado d) e quindi delle sue derivate prime (che avranno grado $d-1$), otteniamo

$$X_0\Phi_{i0} + X_1\Phi_{i1} + X_2\Phi_{i2} = (d-1)\Phi_i$$

Dunque

$$X_0 \cdot H_\Phi(X_0, X_1, X_2) = \det \begin{pmatrix} (d-1)\Phi_0 & (d-1)\Phi_1 & (d-1)\Phi_2 \\ \Phi_{01} & \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{02} & \Phi_{12} & \Phi_{22} \end{pmatrix}$$

Applicando la stessa procedura alle colonne, otteniamo la formula voluta. □

In coordinate affini, otteniamo la formula seguente.

Corollario 0.5. *Sia $[\Phi]$ una curva di grado d in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, il cui supporto non contenga la retta $L = \{X_0 = 0\}$. Sia $\alpha : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus L$ l'affinità data da $\alpha(x_1, x_2) = [1, x_1, x_2]$ e sia $\phi = (X_0^{-d}\Phi) \circ \alpha \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ la curva affine indotta su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Similmente, se H_Φ è l'hessiana di Φ, sia $h_\Phi = (X_0^{3(d-2)} H_\Phi) \circ \alpha \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Allora*

$$h_\Phi(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} d(d-1)\phi & (d-1)\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & (d-1)\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ (d-1)\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (d-1)\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Proof. Basta notare che, $\phi(x_1, x_2) = \Phi(\alpha(x_1, x_2)) = \Phi(1, x_1, x_2)$ e che

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p) = X_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial X_i}(\alpha(p))$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \, \partial x_j}(p) = X_0^{-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i \, \partial X_j}(\alpha(p))$$

per ogni $i, j = 1, 2$ e per ogni $p \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. □

Il lemma seguente mostra che la nozione di polinomio hessiano dipende dalle coordinate scelte solo a meno di un fattore di proporzionalità, e dunque la curva indotta (quando il polinomio non è nullo) è ben definita e indipendente dalle coordinate scelte.

Lemma 0.6. *La curva $[H_\Phi]$ non dipende dalla scelta delle coordinate X.*

Proof. Sia $\mu : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una proiettività, indotta dall'isomorfismo lineare $M : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, ossia tale che $\mu = \mathbb{P}(M)$. Sia inoltre $\Psi = \Phi \circ M$.

Un facile conto dà

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_i}(v) = \sum_{k=0}^{2} M_{ki} \frac{\partial \Phi}{\partial X_k}(Mv)$$

per ogni $v \in V$. Derivando una seconda volta, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_i \, \partial X_j}(v) = \sum_{h,k=0}^{2} M_{hj} M_{ki} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_h \, \partial X_k}(Mv)$$

ossia

$$\mathcal{H}_\Psi(v) = M^T \mathcal{H}_\Phi(Mv) M$$

Dunque, prendendo i determinanti,

$$H_\Psi(v) = \det(M)^2 H_\Phi(Mv)$$

ossia $\mu^*[\Phi] = [\Psi]$. □

Grazie al lemma precedente, la seguente definizione è ben posta.

Definizione 0.7. Sia $[F]$ una curva di grado d in un piano proiettivo $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V)$, sia $X : V \to \mathbb{K}^3$ è un qualunque sistema di coordinate e sia $\Phi = F \circ X^{-1}$. Allora la **funzione polinomiale hessiana** $H_F := H_\Phi \circ X : V \to \mathbb{K}$ è ben definita a meno di moltiplicare per elementi in $\mathbb{K}^*$. Se tale funzione è non nulla, risulta ben definita la **curva hessiana** $[H_F]$ in $\mathbf{P}$, ossia $[H_F]$ non dipende dal sistema di coordinate X scelto.

Proposizione 0.8. *Sia $[F]$ una curva di grado d in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Allora:*

1. *Un punto liscio $P \in \mathbb{V}(F)$ è un flesso per $[F]$ se e solo se $P \in \mathbb{V}(H_F)$.*
2. *L'insieme dei flessi di $[F]$ è finito, a meno che $\mathbb{V}(F)$ contenga una retta.*
3. *Se $\mathbb{V}(F)$ non contiene una retta, il numero dei flessi è al più $3d(d-2)$. [Avendo l'enunciato di Bézout forte, si potrebbe dimostrare che: se fossero tutti ordinari, i flessi sarebbero esattamente $3d(d-2)$.]*

Proof. $\overline{(1)}$: A meno di cambiare coordinate, possiamo assumere che $P = [1, 0, 0] \in \mathbb{V}(F)$ e $\overline{\text{che}}$ $T_P[F] = \{X_2 = 0\}$.

Sia $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una retta non contenuta né nel supporto di F né nel supporto di H_F. Possiamo supporre $L = \{X_0 = 0\}$. Sia $\alpha : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus L$ l'affinità definita da $\alpha(x_1, x_2) = [1, x_1, x_2]$. Inoltre, sia $f = (X_0^{-d} F) \circ \alpha \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ l'ipersuperficie di grado d indotta su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Chiamiamo inoltre $h_F = (X_0^{3(d-2)} H_F) \circ \alpha \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$.

Un lemma precedente dà

$$h_F = \det \begin{pmatrix} d(d-1)f & (d-1)\frac{\partial f}{\partial x_1} & (d-1)\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ (d-1)\frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (d-1)\frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix}$$

Ora, se $O = (0,0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, abbiamo $\alpha(O) = P$ e $T_O[f] = \{x_2 = 0\} =: \tau$. Se $V(f)$ contiene τ, ossia se x_2 divide f, è facile vedere che O è di flesso per $[f]$ e che $h_F(O) = 0$.

Supponiamo quindi che x_2 non divida f. Possiamo quindi scrivere f come

$$f(x_1, x_2) = x_1^m \cdot q(x_1) + x_2 \cdot r(x_1, x_2)$$

con $q(0) \neq 0$, in cui l'intero $m \geq 2$ e i polinomi $q(x_1)$ e $r(x_1, x_2)$ sono unici. In tal caso una rapida verifica dà $m = \mathrm{mult}_O(\tau \cdot [f])$. Notiamo anche che $r(O) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(O) \neq 0$ perché $x_2 = 0$ è la tangente a $[f]$ in O.

Dunque, il punto $O \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è un flesso per $[f]$ se e solo $m \geq 3$.

Calcoliamo

$$h_F = d(d-1)f(f_{11}f_{22} - f_{12}^2) + (d-1)^2[f_2(f_1 f_{12} - f_2 f_{11}) - f_1(f_1 f_{22} - f_2 f_{12})]$$

dove

$$\begin{aligned} f_1 &= m x_1^{m-1} q + x_1^m q_1 + x_2 r_1 \\ f_2 &= r + x_2 r_2 \\ f_{11} &= m(m-1)x_1^{m-2} q + 2m x_1^{m-1} q_1 + x_1^m q_{11} + x_2 r_{11} \\ f_{12} &= r_1 + x_2 r_{12} \\ f_{22} &= r_2 + x_2 r_{22} \end{aligned}$$

dove $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Valutando in O e ricordando che $m \geq 2$, otteniamo

$$h_F(O) = -(d-1)^2 f_2(O)^2 f_{11}(O)$$

Dunque $h_F(O) = 0 \iff f_{11}(O) = 0 \iff m \geq 3 \iff O$ è flesso per $[f]$.

<ins>(2)</ins>: Chiaramente, se esiste una retta T contenuta in $\mathbb{V}(F)$, allora tutti i punti di T lisci per $[F]$ (che sono infiniti, perché $\mathbb{K}$ è infinito) sono di flesso. D'altra parte, se ci fossero infiniti flessi, ci sarebbero infiniti punti di intersezione tra $\mathbb{V}(F)$ e $\mathbb{V}(H_F)$ e quindi per Bézout esisterebbe una componente comune a $\mathbb{V}(F)$ e $\mathbb{V}(H_F)$ (nel caso in cui $H_F \equiv 0$, prendiamo una componente irriducibile qualunque di $[F]$). A meno di restringerci ad analizzare solo tale componente comune, possiamo supporre che F sia un polinomio primo. Se $[F]$ è una retta, abbiamo finito. Altrimenti, supponiamo che $\deg(F) \geq 2$ e $\mathbb{V}(F) \subseteq \mathbb{V}(H_F)$. Sia $P \in \mathbb{V}(F)$ un punto liscio per $[F]$ e prendiamo coordinate X, in modo tale che $P = [1, 0, 0]$ e $G_1 = X_2$.

Passiamo all'equazione affine $f = (X_0^{-d} F) \circ \alpha$ come sopra. Quindi f è un polinomio irriducibile, non diviso da x_2. Vogliamo dimostrare che f non divide h_F.

Come già visto, $h_F = d(d-1)f(f_{11}f_{22} - f_{12}^2) + (d-1)^2[f_2(f_1f_{12} - f_2f_{11}) - f_1(f_1f_{22} - f_2f_{12})]$. Notiamo che H_F è multiplo di F se e solo se $g := f_2(f_1f_{12} - f_2f_{11}) - f_1(f_1f_22 - f_2f_{12})$ è multiplo di f.

Se ci restringiamo alla retta tangente $\tau = \{x_2 = 0\}$ a $[f]$ in O, otteniamo

$$\begin{aligned}
f_1|_\tau &= mx_1^{m-1}q + x_1^m q_1 \\
f_2|_\tau &= r|_\tau \\
f_{11}|_\tau &= m(m-1)x_1^{m-2}q + 2mx_1^{m-1}q_1 + x_1^m q_{11} \\
f_{12}|_\tau &= r_1|_\tau \\
f_{22}|_\tau &= r_2|_\tau
\end{aligned}$$

da cui $\mathrm{mult}_O([f_1] \cdot \tau) = m - 1$, $\mathrm{mult}_O([f_{11} \cdot \tau]) = m - 2$ e $\mathrm{mult}_O([f_2] \cdot \tau) = 0$. Dunque $\mathrm{mult}_O([h_F] \cdot \tau) = m - 2$.

Se per assurdo f dividesse h_F, allora potremmo scrivere $h_F = f \cdot g$ e avremmo $m - 2 = \mathrm{mult}_O([h_F] \cdot \tau) = \mathrm{mult}_O([f] \cdot \tau) + \mathrm{mult}_O([g] \cdot \tau) \geq m$. Questa contraddizione mostra che f non divide h_F.

<u>(3)</u>: Per (2), dato che $\mathbb{V}(F)$ non contiene una retta, allora $[F]$ e $[H_F]$ non hanno componenti comuni. Per Bézout, $\mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(H_F)$ è non vuoto e contiene al più $\deg(F)\mathrm{def}(H_F) = 3d(d-2)$ punti. La conclusione segue notando che l'insieme dei flessi per $[F]$ è contenuto in $\mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(H_F)$. $\square$