Capitolo 9

Spazi proiettivi

Sia $\mathbb{A}$ un piano affine. Due rette distinte $L, M \subset \mathbb{A}$ si intersecano in un punto oppure sono disgiunte. Più precisamente le rette si intersecano in un punto se sono scelte genericamente, e sono disgiunte (cioè parallele) per scelte particolari. A partire da $\mathbb{A}$ si può costruire in modo naturale un piano *proiettivo* aggiungendo i punti *all'infinito* di intersezione di rette parallele. Nel caso in cui $\mathbb{A}$ sia un piano affine *reale* si può dare un senso intuitivo a questa frase nel seguente modo. Consideriamo rette parallele L, M, un punto $p \in L$ e, per ogni punto $t \in M$ la retta $R_t := \langle p, t\rangle$ contenente p e t. Scegliendo coordinate affini su M possiamo pensare che t sia un numero reale. Ora consideriamo valori di t sempre più grandi, cioè facciamo tendere t all'infinito. Siccome per $t \to \infty$ la retta R_t si avvicina sempre più alla retta L, e d'altra parte R_t incontra M nel punto t, vediamo che scappando verso l'infinito lungo la retta L andiamo verso il "punto d'intersezione" tra L e M (attenzione: ci si avvicina allo stesso punto all'infinito sia che si percorra L in una direzione o in quella opposta). Questo diventa ancora più chiaro se proiettiamo da un punto fissato un piano orizzontale su un altro piano (non parallelo), come quando un pittore dipinge un quadro rispettando le regole della prospettiva: l'orizzonte, cioè l'insieme dei punti all'infinito del piano orizzontale, viene proiettato (disegnato) su una retta ordinaria H e rette sul piano orizzontale che sono parallele vengono proiettate su rette che si intersecano in un punto di H. Riassumendo: ogni retta di $\mathbb{A}$ determina un punto *all'infinito* del piano proiettivo contente $\mathbb{A}$ e due tali punti sono uguali se e solo se sono i punti all'infinito di rette parallele. La definizione di spazio proiettivo che daremo sarà lontana dalle considerazioni intuitive che abbiamo appena fatto: più oltre stabiliremo il contatto con la discussione appena fatta. Nel presente capitolo $\mathbb{K}$ sarà un campo e gli spazi vettoriali saranno sempre finitamente generati.

9.1 Definizioni

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Lo *spazio proiettivo associato a* V, o *proiettificato di* V è l'insieme dei sottospazi vettoriali $L \subset V$ di dimensione 1, e si denota $\mathbb{P}(V)$. Uno *spazio proiettivo su* $\mathbb{K}$ è la proiettivizzazione di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ si dicono *punti.* Dato un vettore *non nullo* $v \in V$ il sottospazio generato da v è un elemento di $\mathbb{P}(V)$: per adeguarci alla tradizione denoteremo il sottospazio $\langle v\rangle$ con $[v]$. Siccome ogni sottospazio 1-dimensionale di V è generato da un vettore non nullo, ogni elemento di $\mathbb{P}(V)$ è dato da $[v]$ per qualche $v \in (V \setminus \{0\})$. Siano $v, w \in (V \setminus \{0\})$: allora $[v] = [w]$ se e solo se esiste $\mu \in \mathbb{K}^*$ (ricordiamo che $\mathbb{K}^* = (\mathbb{K} \setminus \{0\})$ tale che $v = \mu w$. Quindi $\mathbb{P}(V)$ è naturalmente identificato con lo spazio quoziente di $(V \setminus \{0\})$ per la relazione di equivalenza $\sim$ definita dalla condizione che $v \sim w$ se esiste $\mu \in \mathbb{K}^*$ tale che $v = \mu w$.

Esempio 9.1.1. Se $V = \{0\}$ allora $\mathbb{P}(V) = \emptyset$. Se $\dim V = 1$ allora $\mathbb{P}(V)$ è il singolo punto V.

Definizione 9.1.2. La *dimensione* dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è data

$$\dim \mathbb{P}(V) := (\dim V - 1). \tag{9.1.0.1}$$

Una *retta proiettiva* è uno spazio proiettivo di dimensione 1, un *piano proiettivo* è uno spazio proiettivo di dimensione 2.

La definizione appena data di dimensione è sicuramente giustificata nel caso in cui $\dim V \leq 1$ - vedi l'**Esempio 9.1.1**. Nel seguito giustificheremo l'**Esempio 9.1.1** in generale.

Definizione 9.1.3. Lo spazio proiettivo *numerico* n-dimensionale su $\mathbb{K}$ è $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ e viene denotato $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. I suoi punti vengono denotati $[X_0, \ldots, X_n]$ (anzichè $[(X_1, \ldots, X_{n+1})]$).

Esempio 9.1.4. 1. La retta proiettiva numerica $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ è l'unione disgiunta

$$\{[1, x] \mid x \in \mathbb{K}\} \sqcup \{[0, 1]\}. \tag{9.1.0.2}$$

Il punto $[0, 1]$ si denota tradizionalmente ∞ e quindi abbiamo l'identificazione di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K}\sqcup\{\infty\}$. La notazione è motivata dal caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: se $x \mapsto \infty$ il punto $[1, x]$ si avvicina a $[0, 1]$ perchè $[1, x] = [x^{-1}, 1]$. La corrispondenza è data da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \sqcup \{\infty\} \\ [X_0, X_1] & \mapsto & X_0/X_1 \end{array} \tag{9.1.0.3}$$

dove per convenzione $a/0 = \infty$ per $a \neq 0$.

2. Il piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è l'unione disgiunta

$$\{[1, x, y] \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2\} \sqcup \{[0, 1, y] \mid y \in \mathbb{K}\} \sqcup \{[0, 0, 1]\}. \tag{9.1.0.4}$$

In entrambi gli esempi "quasi tutti" i punti dello spazio proiettivo appartengono a un sottoinsieme che possiamo identificare con uno spazio affine; svilupperemo questo punto di vista nella **Sezione 9.2**.

I sottospazi vettoriali di V definiscono (per proiettivizzazione) i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

Definizione 9.1.5. Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme A di $\mathbb{P}(V)$ è un *sottospazio proiettivo* o *sottospazio lineare* se esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ tale che $A = \mathbb{P}(W)$. La *codimensione* di A in $\mathbb{P}(V)$ è uguale a $(\dim \mathbb{P}(V) - \dim A)$. Diciamo che A è una *retta* se $\dim A = 1$, che è un *piano* se $\dim A = 2$, e che è un *iperpiano* se $\dim A = (\dim \mathbb{P}(V) - 1)$ (cioè se $\dim W = (\dim V - 1)$.

Osservazione 9.1.6. Dalle proprietà della dimensione di spazi vettoriali segue che se $A \subsetneq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo allora $\dim A < \dim \mathbb{P}(V)$.

Esempio 9.1.7. Sia $L \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un sottospazio proiettivo. Per definizione esiste un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{K}^{n+1}$ tale che $L = \mathbb{P}(W)$. Siano

$$0 = F_1(X_0, \ldots, X_n) = F_2(X_0, \ldots, X_n) = \ldots = F_r(X_0, \ldots, X_n) \tag{9.1.0.5}$$

equazioni cartesiane di W, cioè $(X_0, \ldots, X_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ appartiene a W se e solo se valgono le equazioni (9.1.0.5). Notate che

$$r \geq \mathrm{cod}(W, K^{n+1}) = \mathrm{cod}(L, \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) \tag{9.1.0.6}$$

e che possiamo scegliere $F_1, \ldots, F_r$ con $r = \mathrm{cod}(L, \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$. Le (9.1.0.5) si dicono *equazioni cartesiane omogenee* di L: quindi $[X_0, \ldots, X_n] \in L$ se e solo se valgono le equazioni (9.1.0.5). A questo proposito va notato che valgono le (9.1.0.5) per $(X_0, \ldots, X_n)$ se e solo se valgono le (9.1.0.5) con $(X_0, \ldots, X_n)$ sostituito da $(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n)$ dove $\lambda \in \mathbb{K}^*$ - questo perchè le F_i sono funzioni lineari.

Proposizione 9.1.8. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $L_i \subset \mathbb{P}(V)$ una collezione di sottospazi proiettivi, dove i appartiene a un insieme di indici I. L'intersezione $\bigcap_{i\in I} L_i$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.*

Dimostrazione. Sia $i \in I$: per ipotesi esiste un sottospazio vettoriale $W_i \subset V$ tale che $L_i = \mathbb{P}(W_i)$. Si ha che

$$\bigcap_{i\in I} L_i = \bigcap_{i\in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} W_i). \tag{9.1.0.7}$$

Siccome l'intersezione dei sottospazi vettoriali W_i è un sottospazio vettoriale di V segue la Proposizione. □

Osservazione 9.1.9. Sia A sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$. Dalla **Proposizione 9.1.8** segue che l'intersezione di tutti i sottospazi lineari contenenti A è il minimo sottospazio lineare $L \subset \mathbb{P}(V)$ contenente A (cioè è contenuto in ogni sottospazio lineare contente A). Diciamo che questo sottospazio è *generato da* A e lo denotiamo con $\langle A \rangle$. Se A non è vuoto lo spazio $\langle A \rangle$ è lo spazio proiettivo associato al sottospazio di V generato dai vettori $v \neq 0$ tali che $[v] \in A$:

$$\langle A \rangle = \mathbb{P}(\langle \{v \in (V \setminus \{0\}) \mid [v] \in A\} \rangle). \tag{9.1.0.8}$$

Proposizione 9.1.10. *Siano $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $p, q \in \mathbb{P}(V)$ punti* distinti*. Esiste una e una sola retta contenente sia p che q.*

Dimostrazione. Esistono $v, w \in V$ non nulli tali che $p = [v]$ e $q = [w]$. Siccome $p \neq q$ i vettori v, w sono linearmente indipendenti e quindi generano un sottospazio vettoriale di V di dimensione 2. Quindi $\mathbb{P}(\langle v, w \rangle)$ è una retta di $\mathbb{P}(V)$ che contiene sia p che q. D'altra parte sia $L \subset \mathbb{P}(V)$ una retta contente p e q. Per definizione esiste un sottopsazio vettoriale $U \subset V$ di dimensione 2 tale che $L = \mathbb{P}(U)$. Siccome $p = [v] \in L$ segue che $v \in U$ e, analogamente, siccome $q \in L$ abbiamo che $w \in U$. Quindi $\langle v, w \rangle \subset U$ e siccome $\dim\langle v, w \rangle = 2 = \dim U$ ne segue che $U = \langle v, w \rangle$, cioè $L = \mathbb{P}(\langle v, w \rangle)$. □

La **Proposizione 9.1.8** e la **Proposizione 9.1.10** mettono in evidenza l'analogia tra sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo e sottospazi affini di uno spazio affine. Nel seguito vedremo che esiste una fondamentale differenza tra spazi affini e spazi proiettivi - una differenza che si può sintetizzare dicendo che gli spazi proiettivi si comportano in modo più regolare degli spazi affini.

9.2 Spazi proiettivi e spazi affini

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $(n+1)$; mostreremo che $\mathbb{P}(V)$ è ricoperto da sottoinsiemi che sono in modo naturale dei-$\mathbb{K}$ spazi affini di dimensione n. Stabiliremo un collegamento tra questo fatto e la descrizione intuitiva di spazio proiettivo data all'inizio del presente capitolo.

9.2.1 Sottospazi affini di spazi proiettivi

Siano $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di dimensione n e $u \in (V \setminus W)$. Definiamo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \\ w & \mapsto & [u+w] \end{array} \tag{9.2.1.1}$$

Proposizione 9.2.1. *L'applicazione ϕ definita da* (9.2.1.1) *è una bijezione.*

Dimostrazione. Sia $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$, quindi $p = [v]$ dove $v \notin W$. Per Grassmann esistono $w \in W$ e $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ tali che $v = w + \lambda u$, e perciò

$$p = [v] = [w + \lambda u] = [\lambda^{-1} w + u]. \tag{9.2.1.2}$$

Siccome $\lambda^{-1} w \in W$ questo dimostra che ϕ è suriettiva. Ora dimostriamo che ϕ è iniettiva. Supponiamo che $[u + w_1] = [u + w_2]$: allora esiste $0 \neq \mu \in \mathbb{K}$ tale che $(u + w_1) = \mu(u + w_2)$, ovvero $(1 - \mu)u = (\mu w_2 - w_1)$. Se $\mu \neq 1$ segue che $u = (\mu - 1)^{-1}(w_1 - \mu w_2) \in W$, contro l'ipotesi, quindi $\mu = 1$ e perciò $w_1 = w_2$. □

La (9.1) dà una rappresentazione grafica della ϕ per V di dimensione 2.

Esempio 9.2.2. Sia $V = \mathbb{K}^{n+1}$ e indichiamo i vettori di $\mathbb{K}^{n+1}$ con $(X_0, \ldots, X_n)$. Siano $W := \ker(X_0)$ e $u = [1, 0, \ldots, 0]$. Facciamo l'identificazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & W \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (0, x_1, \ldots, x_n) \end{array} \tag{9.2.1.3}$$

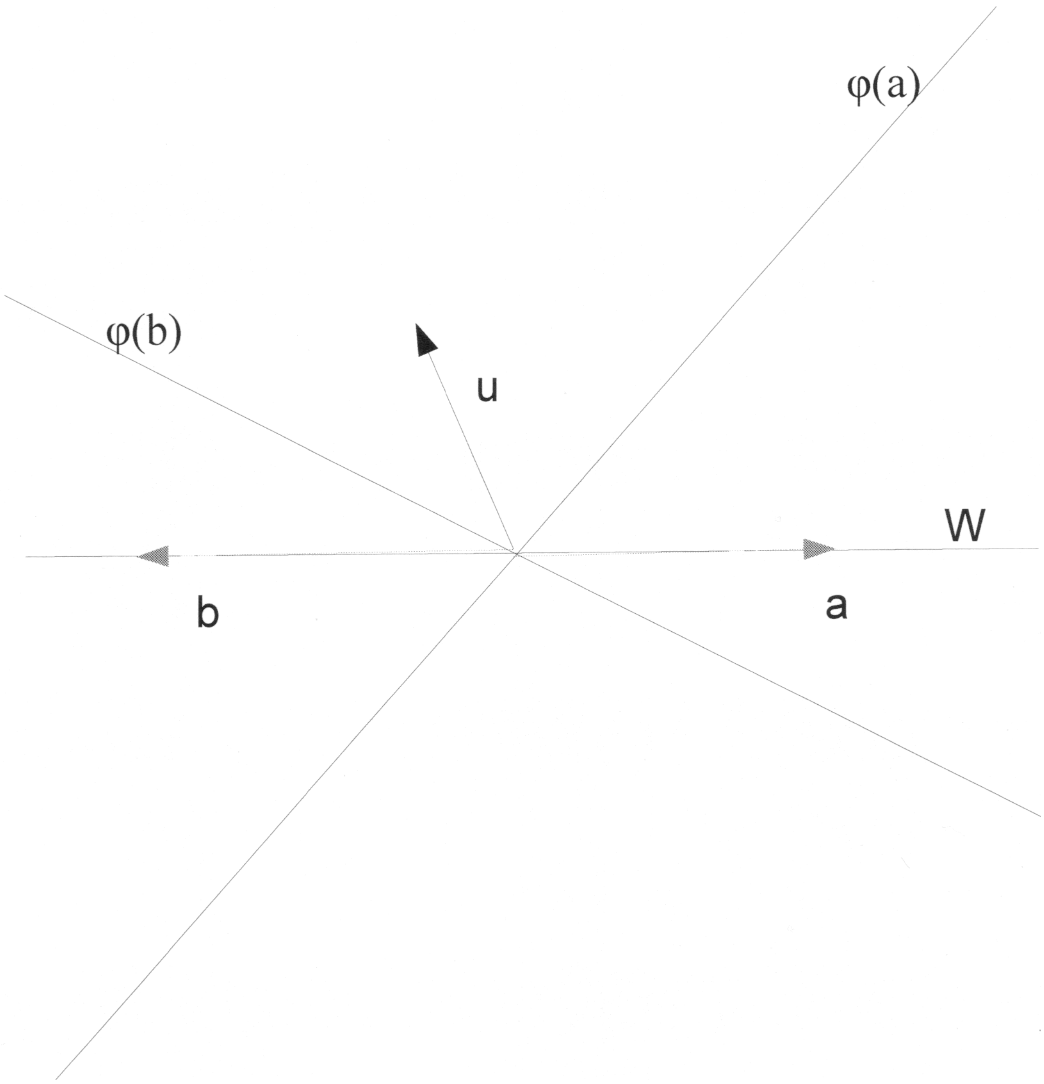

Figura 9.1: La bijezione (9.2.1.1) in dimensione 2

Con questa identificazione la mappa ϕ di (9.2.1.1) diventa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \ker(X_0) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & [1, x_1, \ldots, x_n] \end{array} \tag{9.2.1.4}$$

È utile notare che l'inversa di ϕ è l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \ker(X_0) & \xrightarrow{\phi^{-1}} & \mathbb{K}^n \\ [X_0, X_1, \ldots, X_n] & \mapsto & (X_1/X_0, X_2/X_0, \ldots, X_n/X_0) \end{array} \tag{9.2.1.5}$$

Il risultato che segue afferma che la ϕ è compatibile con le nozioni di sottospazio affine di W e di sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.

Proposizione 9.2.3. *Sia ϕ l'applicazione data da (9.2.1.1). Se L è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ allora $\phi^{-1}L$ è un sottospazio affine di W o è vuoto. Viceversa sia $A \subset W$ un sottospazio affine e $\langle\phi(A)\rangle$ il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ generato da $\phi(A)$: allora $\phi^{-1}(\langle\phi(A)\rangle) = A$.*

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando che se L è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ allora $\phi^{-1}(L)$ è un sottospazio affine di W o è vuoto. Per ipotesi esiste un sottospazio vettoriale $S \subset V$ tale che $L = \mathbb{P}(S)$. Possiamo supporre che $\phi^{-1}(L)$ non sia vuoto (altrimenti non c'è nulla da dimostrare). Sia $w_0 \in \phi^{-1}(L)$, cioè $u + w_0 \in S$. Dimostriamo che

$$\phi^{-1}(L) = w_0 + S \cap W. \tag{9.2.1.6}$$

Infatti sia $w \in \phi^{-1}(L)$, cioè $u + w \in S$: allora siccome S è un sottospazio vettoriale di V si ha che

$$(w - w_0) = (u + w) - (u + w_0) \in S \cap W. \tag{9.2.1.7}$$

Questo dimostra che $\phi^{-1}(L) \subset (w_0 + S \cap W)$. Viceversa, sia $z \in S \cap W$: allora

$$u + (w_0 + z) = (u + w_0) + z \in S \tag{9.2.1.8}$$

cioè $\phi(w_0 + z) \in L$. Questo mostra che $\phi^{-1}(L) \supset (w_0 + S \cap W)$ e finisce la dimostrazione di (9.2.1.6). Siccome S e W sono sottospazi vettoriali di V anche $S \cap W$ lo è e quindi la (9.2.1.6) mostra che $\phi^{-1}(L)$ è un sottospazio affine di W. Ora sia $A \subset W$ un sottospazio affine e dimostriamo che $\phi^{-1}(\langle\phi(A)\rangle) = A$. Siano $w_0 \in A$ e $\mathcal{G}(A)$ la giacitura di A (quindi $\mathcal{G}(A)$ è un sottospazio vettoriale di W). Sia S il sottospazio vettoriale di V definito da

$$S := \langle u + w_0 \rangle + \mathcal{G}(A). \tag{9.2.1.9}$$

Dimostriamo che $\mathbb{P}(S) = \langle\phi(A)\rangle$. È chiaro che $\phi(A) \subset \mathbb{P}(S)$, resta da dimostrare che se un sottospazio proiettivo $L \subset \mathbb{P}(V)$ contiene $\phi(A)$ allora contiene $\mathbb{P}(S)$. Per ipotesi $L = \mathbb{P}(U)$ dove $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale. Siccome $w_0 \in A$ abbiamo che $(u + w_0) \in U$ e quindi $\langle u + w_0 \rangle \subset U$. Sia $w \in \mathcal{G}(A)$: allora $(w_0 + w) \in A$ e quindi $(u + w_0 + w) \in U$, siccome U è uno spazio vettoriale contenente $(u + w_0)$ segue che $w \in U$. Questo dimostra che $\mathcal{G}(A) \subset U$. Quindi U contiene $(\langle u + w_0 \rangle + \mathcal{G}(A))$ ovvero S. Resta da dimostrare che $\phi^{-1}(\mathbb{P}(S)) = A$. È chiaro che $A \subset \phi^{-1}(\mathbb{P}(S))$. Ora sia $w \in \phi^{-1}(\mathbb{P}(S))$ cioè $(u + w) \in S$. Quindi esistono $\lambda \in \mathbb{K}$ e $z \in \mathcal{G}(A)$ tali che $(u + w) = \lambda(u + w_0) + z$. Perciò $(1 - \lambda)u = \lambda w_0 - w + z$. Se $\lambda \neq 1$ segue che $u = (1 - \lambda)^{-1}(\lambda w_0 - w + z) \in W$ e questa è una contraddizione, quindi $\lambda = 1$ e perciò $w = (w_0 + z)$ ovvero $w \in A$. □

Abbiamo identificato $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ con lo spazio affine W e quindi gli abbiamo dato una struttura di spazio affine, ma per fare questo abbiamo scelto $u \in (V \setminus W)$. Se cambiamo u cambiamo l'identificazione tra $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ e W, sarebbe preferibile dare a $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ una struttura di spazio affine senza fare alcuna scelta. Spiegheremo come si possa dare una tale struttura affine. Innanzitutto ricordiamo che per dare una struttura affine dobbiamo definire un'azione di $\mathcal{V}$ su $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$, cioè scegliere uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ e definire una "somma" $p + v$ per ogni $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ e $v \in \mathcal{V}$ in modo tale che valgano le proprietà elencate nella **Definizione 3.4.1**. Ricordiamo che $\mathcal{L}(V/W, W)$ è l'insieme delle applicazioni lineari dallo spazio quoziente V/W a W, e che $\mathcal{L}(V/W, W)$, con le operazioni di somma e prodotto per scalare puntuali è a sua volta uno spazio vettoriale - questa è la nostra scelta di spazio vettoriale che agirà su $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$. Dati $[v] \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ e $f \in \mathcal{L}(V/W, W)$ poniamo

$$[v] + f := [v + f(\overline{v})] \tag{9.2.1.10}$$

dove $\overline{v} \in (V/W)$ è la classe di equivalenza di v. Prima di tutto notiamo che la (9.2.1.10) è ben posta: infatti siccome $v \notin W$ e $f(\overline{v}) \in W$ si ha che $(v + f(\overline{v})) \neq 0$ e inoltre se sostituiamo a v il vettore μv con $\mu \neq 0$, allora la (9.2.1.10) ci dà come valore di $[\mu v] + f$ il punto

$$[\mu v + f(\mu\overline{\mu v})] = [\mu v + f(\mu\overline{v})] = [\mu v + \mu f(\overline{v})] = [v + f(\overline{v})]. \tag{9.2.1.11}$$

Inoltre facili calcoli danno che

- $p + \mathbf{0} = p$ per ogni $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$.
- $p + (f + g) = (p + f) + g$ per ogni $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ e $f, g \in \mathcal{L}(V/W, W)$.

- dati $p, q \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ esiste un unico $f \in \mathcal{L}(V/W, W)$ tale che $p + f = q$.

Quindi la (9.2.1.10) dà a $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ una struttura di spazio affine con spazio vettoriale associato $\mathcal{L}(V/W, W)$ - notate che ora non abbiamo fatto alcuna scelta aggiuntiva.

Osservazione 9.2.4. Scelto $u \in (V \setminus W)$ possiamo dare l'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V/W, W) & \overset{\sim}{\longrightarrow} & W \\ f & \mapsto & f(\overline{u}) \end{array} \tag{9.2.1.12}$$

Si verifica facilmente che, fatta questa identificazione, la struttura di spazio affine su $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ con spazio vettoriale associato $\mathcal{L}(V/W, W)$ è isomorfa alla struttura di spazio affine data dall'identificazione (9.2.1.1). Quindi possiamo riformulare la **Proposizione 9.2.3** dicendo che se $L \subset \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo allora la sua intersezione con lo spazio affine $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ (dove $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1) è un sottospazio affine o l'insieme vuoto, e che ogni sottospazio affine di $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ è dato dall'intersezione con un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 9.2.5. Per l'**Osservazione 9.2.4** la **Proposizione 9.2.3** afferma che se $L \subset \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo allora $L \cap (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ è un sottospazio affine (o vuoto), e che se $A \subset (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ è un sottospazio affine allora $\langle A \rangle \cap (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)) = A$. La *chiusura* di un sottospazio affine $A \subset (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ è il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ generato da A (cioè $\langle A \rangle$), e si denota $\overline{A}$.

Osservazione 9.2.6. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ si ottiene dallo spazio affine n-dimensionale $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ aggiungendo i punti di $\mathbb{P}(W)$, il quale a sua volta si ottiene da uno spazio affine di dimensione $(n-1)$ aggiungendo i punti di uno spazio proiettivo di dimensione $(n-2)$ e così via fino ad arrivare a un punto - confrontate con l'**Esempio 9.1.4**. Nel caso dello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ la decomposizione appena descritta si scrive

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \sqcup \mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{K}} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \sqcup \{\text{punto}\}. \tag{9.2.1.13}$$

9.2.2 Il caso degli spazi proiettivi numerici

Sia $L \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un sottospazio lineare di equazioni cartesiane omogenee (9.1.0.5): allora $L \cap (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$ ha equazioni cartesiane *affini*

$$0 = F_1(1, x_1, \ldots, x_n) = F_2(1, x_1, \ldots, x_n) = \ldots = F_r(1, x_1, \ldots, x_n). \tag{9.2.2.1}$$

dove le $(x_1, \ldots, x_n)$ sono come in (9.2.1.4). È chiaro che le equazioni (9.2.2.2) definiscono un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ oppure il sottoinsieme vuoto. Viceversa sia $A \subset (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$ un sottospazio affine. Identifichiamo gli spazi affini $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$ e $\mathbb{K}^n$ per mezzo dell'isomorfismo (9.2.1.4). Quindi A sarà l'insieme delle soluzioni di equazioni cartesiane

$$0 = f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_2(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_r(x_1, \ldots, x_n), \tag{9.2.2.2}$$

dove ciasun f_i è un polinomio (in generale *non* omogeneo) di grado 1. Per $1 \le i \le r$ sia

$$F_i := X_0 f_i(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0). \tag{9.2.2.3}$$

Notate che F_i è un polinomio omogeneo di grado 1: se $f_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ allora

$$F_i = b_i X_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j. \tag{9.2.2.4}$$

Allora $\langle A \rangle$ è il sottospazio proiettivo di equazioni cartesiane omogenee

$$0 = F_1(X_0, \ldots, X_n) = \ldots = F_r(X_0, \ldots, X_n). \tag{9.2.2.5}$$

Infatti l'insieme delle soluzioni di (9.2.2.5) è un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tale che $\mathbb{P}(U) \cap (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0)) = A$, quindi è sufficiente dimostrare che $\mathbb{P}(U)$ è generato da A. Siccome A è non vuoto $(\ker X_0) \cap U$ è un sottospazio *proprio* di U e quindi U è generato dal complementare $U \setminus (\ker X_0)$, ovvero $\mathbb{P}(U)$ è generato da A.

9.2.3 Punti all'infinito, formula di Grassmann

Siano V e W come nella **Sottosezione 9.2.1**. I punti di $\mathbb{P}(W)$ si dicono *punti all'infinito* (o *punti impropri*) e $\mathbb{P}(W)$ è l'*iperpiano all'infinito* (o *iperpiano improprio*) - notate che la terminologia è relativa alla scelta di un determinato sottospazio $W \subset V$ con $\dim W = (\dim V - 1)$, non ha senso una nozione "assoluta" di punto all'infinito di $\mathbb{P}(V)$.

Definizione 9.2.7. Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ l'iperpiano all'infinito *tradizionale* è $\mathbb{P}(\ker X_0)$.

Perchè "punti all'infinito" ? Supponiamo che $L, M \subset (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ siano rette parallele - ricordiamo che ciò siginifica che $\mathcal{G}(L) = \mathcal{G}(M)$. Allora le chiusure di L e M sono rette proiettive che si intersecano in un punto di $\mathbb{P}(W)$ (cioè all'infinito), questo segue subito dalla (9.2.1.9). In particolare, nel caso in cui $\dim V = 3$, vediamo che il piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è ottenuto aggiungendo al piano affine $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ i punti (all'infinito) di intersezione di rette parallele. Questa discussione fa immaginare che i sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo godano di proprietà più semplici dei sottospazi affini di spazi affini. Le proppriet̀a in questione sono una immediata conseguenza della formula di Grassmann per spazi vettoriali.

Proposizione 9.2.8 (Formula di Grassmann proiettiva)**.** *Siano $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e A, B sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Allora*

$$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim\langle A \cup B\rangle. \tag{9.2.3.1}$$

Dimostrazione. Esistono sottospazi vettoriali $U, W \subset V$ tali che $A = \mathbb{P}(U)$ e $B = \mathbb{P}(W)$. Quindi $\langle A \cup B\rangle = \mathbb{P}(U + W)$, $A \cap B = \mathbb{P}(V \cap W)$ e (9.2.3.1) segue dalla formula di Grassmann per spazi vettoriali. □

Corollario 9.2.9. *Siano $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $A, B \subset \mathbb{P}(V)$ sottospazi proiettivi tali che* $(\dim A + \dim B) \geq \dim \mathbb{P}(V)$. *Allora $A \cap B$ non è vuoto.*

Dimostrazione. Per la (9.2.3.1) si ha che $\dim(A \cap B) \geq 0$ e quindi $A \cap B$ non è vuoto (ricordate che se $A \cap B = \mathbb{P}(U)$ allora $\dim(A \cap B) = (\dim U - 1)$). □

9.3 Applicazioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Supponiamo che $f \colon V \to W$ sia un'applicazione *lineare iniettiva.* Sia $L \in \mathbb{P}(V)$ cioè $L \subset V$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Siccome f è lineare $f(L)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{P}(W)$, e siccome f è iniettiva $\dim f(L) = 1$, cioè $f(L) \in \mathbb{P}(W)$. Quindi la f definisce un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\mathbb{P}(f)} & \mathbb{P}(W) \\ [v] & \mapsto & [f(v)] \end{array} \tag{9.3.0.1}$$

Definizione 9.3.1. Un'applicazione $F \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è *lineare* se esiste un'applicazione lineare iniettiva $f \colon V \to W$ tale che $F = \mathbb{P}(f)$. Una *proiettività* di $\mathbb{P}(V)$ è un'applicazione lineare $F \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$.

In questa sezione studieremo le applicazioni lineari tra spazi proiettivi.

9.3.1 Applicazioni lineari: prime proprietà

Proposizione 9.3.2. *Se $G \colon \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(V)$ e $F \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ sono applicazioni lineari allora $F \circ G$ è un'applicazione lineare. Se F è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$ allora F^{-1} è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$.*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $f \in \mathrm{GL}(V)$ tale che $F = \mathbb{P}(f)$; siccome $F^{-1} = \mathbb{P}(f^{-1})$ e $f^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ segue che F^{-1} è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$. Per ipotesi esistono applicazioni lineari $g \colon U \to V$ e $f \colon V \to W$ tali che $G = \mathbb{P}(g)$ e $F = \mathbb{P}(f)$. Siccome

$$F \circ G = \mathbb{P}(f \circ g) \tag{9.3.1.1}$$

e la composizione $f \circ g$ è lineare segue che $F \circ G$ è lineare. □

Osservazione 9.3.3. L'identità di $\mathbb{P}(V)$ è un'applicazione lineare (è uguale a $\mathbb{P}(\mathrm{Id}_V)$). Per la prima affermazione della **Proposizione 9.3.2** segue che la collezione degli spazi proiettivi su $\mathbb{K}$ con morfismi dati dalle applicazioni lineari è una categoria, in particolare esiste la nozione di isomorfismo tra spazi vettoriali. È chiaro dalla definizione che due spazi proiettivi sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Definizione 9.3.4. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$ è l'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 9.3.5. L'operazione di composizione di applicazioni dà ad $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$ una struttura di gruppo: infatti l'identità di $\mathbb{P}(V)$ è un'applicazione lineare e per la **Proposizione 9.3.2** la composizione di proiettività è una proiettività e una proiettività è un'applicazione biunivoca con inversa che è una proiettività.

In Geometria Proiettiva si studiano le proprietà dei sottoinsiemi di uno spazio proiettivo che sono invarianti per proiettività.

Definizione 9.3.6. Due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti se esiste una proiettività $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$ tale che $F(A) = B$. (Notate che l'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza perchè $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$ è un gruppo.)

Per definizione abbiamo un'applicazione suriettiva

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(V) & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Aut}(V) \\ f & \mapsto & \mathbb{P}(f) \end{array} \tag{9.3.1.2}$$

L'applicazione Φ è un omomorfismo di gruppi - vedi (9.3.1.1).

Proposizione 9.3.7. *Il nucleo di Φ è il sottogruppo delle applicazioni scalari $\{\lambda \mathrm{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.*

Dimostrazione. È chiaro che le applicazioni scalari appartengono al nucleo di Φ. Ora supponiamo che $f \in \mathrm{GL}(V)$ sia nel nucleo di Φ, cioè $\mathbb{P}(f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$. Sia $\{v_0, \ldots, v_n\}$ una base di V. Siccome $\mathbb{P}(f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ esistono $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^*$ tali che $f(v_i) = \lambda_i v_i$ per $0 \le i \le n$. Supponiamo che esistano $0 \le i < j \le n$ tali che $\lambda_i \ne \lambda_j$: allora $f([v_i + v_j]) = [\lambda_i v_i + \lambda_j v_j]$ e siccome $\lambda_i \ne \lambda_j$ segue che $[\lambda_i v_i + \lambda_j v_j] \ne [v_i + v_j]$, e questo contraddice l'ipotesi. Quindi $\lambda_i = \lambda_j$ per ogni $0 \le i < j \le n$ e perciò f è un'applicazione scalare. □

Il gruppo quoziente

$$\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/\{\lambda \mathrm{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \tag{9.3.1.3}$$

è *il gruppo proiettivo lineare*. Per il Teorema di omomorfismo tra gruppi la **Proposizione 9.3.7** dà che la Φ induce un isomorfismo

$$\mathrm{PGL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V)). \tag{9.3.1.4}$$

Esempio 9.3.8. Sia $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}})$. Per definizione esiste

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \tag{9.3.1.5}$$

tale che

$$F([X_0, X_1]) = [aX_0 + bX_1, cX_0 + dX_1]. \tag{9.3.1.6}$$

Nell' **Esempio 9.1.4** abbiamo identificato $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Applicando la (9.1.0.3) l'automorfismo F è identificato con la seguente bijezione di $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ x & \mapsto & \frac{dx+c}{bx+a} \end{array} \tag{9.3.1.7}$$

Quindi $\phi(-a/b) = \infty$ e $\phi(\infty) = d/b$. Le applicazioni (9.3.1.13) sono conosciute come "lineari fratte".

Il risultato che segue mette in relazione applicazioni proiettive e applicazioni affini. Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale di codimensione 1 allora $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$ è uno spazio affine - vedi **Sottosezione 9.2.1**.

Proposizione 9.3.9. *Siano V, W spazi vettoriali della stessa dimensionee e $H \subset V$, $J \subset W$ sottospazi vettoriali di codimensione* 1.

1. *Se $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è un'applicazione lineare tale che $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(J)$ allora*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J)) \\ p & \mapsto & F(p) \end{array} \tag{9.3.1.8}$$

   è un'applicazione affine.

2. *Viceversa sia $\psi\colon (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)) \to (\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(H))$ un'applicazione affine. Esiste una e una sola applicazione lineare $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(J)$ e valga* (9.3.1.8).

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto. Per ipotesi esiste un'isomorfismo di spazi vettoriali $f\colon V \to W$ tale che $F = \mathbb{P}(f)$. Siano $v_0 \in (V \setminus H)$ e $w_0 = f(v_0)$. Siccome $f(H) = J$ e f è un isomorfismo abbiamo che $w_0 \in (W \setminus J)$. Abbiamo le decomposizioni in somma diretta $V = [v_0] \oplus H$ e $W = [w_0] \oplus J$ e i corrispondenti isomorfismi di spazi affini (vedi **Osservazione 9.2.4**)

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H) \\ h & \mapsto & [v_0 + h] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J) \\ j & \mapsto & [w_0 + j] \end{array} \tag{9.3.1.9}$$

Sia $h \in H$: l'uguaglianza $f(v_0 + h) = (w_0 + f(h))$ mostra che ψ è un'applicazione affine. Si può descrivere come segue la corrispondente applicazione tra gli spazi vettoriali associati a $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$ e $(\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(H))$, cioè $\mathcal{L}(V/H, H)$ e $\mathcal{L}(W/J, J)$ rispettivamente. Siccome $f(H) = J$ l'applicazione lineare f induce un isomorfismo $\overline{f}\colon V/H \xrightarrow{\sim} W/J$ con inversa $\overline{f}^{-1}$. Sia $f_H\colon H \to J$ l'isomorfismo definito dalla restrizione di f a H e $\Psi\colon \mathcal{L}(V/H, H) \to \mathcal{L}(W/J, J)$ l'applicazione lineare data da

$$\Psi(g) := f_H \circ g \circ \overline{f}^{-1}. \tag{9.3.1.10}$$

L'applicazione vettoriale $\mathcal{L}(V/H, H) \to \mathcal{L}(W/J, J)$ associata a ψ è uguale a Ψ. Ora dimostriamo il punto 2. Gli isomorfismi di spazi affini (9.3.1.9) ci permettono di considerare $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$ e $\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J)$ come spazi affini su H e J rispettivamente. Sia $\Psi\colon H \to J$ l'associato isomorfismo di spazi vettoriali. Siano $v_0 \in V$ e $w_0 \in W$ come sopra. Definiamo l'isomorfismo di spazi vettoriali

$$\begin{array}{ccc} V = [v_0] \oplus H & \xrightarrow{f} & W = [w_0] \oplus J \\ xv_0 + h & \mapsto & xw_0 + \Psi(h) \end{array} \tag{9.3.1.11}$$

dove $h \in H$. Sia $F := \mathbb{P}(f)$. Si verifica subito che $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(J)$ e che vale (9.3.1.8). L'unicità di F si dimostra in modo simile, lasciamo i dettagli al lettore. □

Sia V uno spazio vettoriale e $H \subset V$ un sottospazio vettoriali di codimensione 1. Denotiamo con $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$ il gruppo delle affinità di $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$. Sia $\mathrm{Stab}(H) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$ il sottoinsieme delle proiettività F tali che $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(H)$. Si verifica subito che $\mathrm{Stab}(H)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$. La **Proposizione 9.3.9** dà un isomorpfismo di gruppi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Stab}(\mathbb{P}(H)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)) \\ F & \mapsto & (p \mapsto F(p)) \end{array} \tag{9.3.1.12}$$

Esempio 9.3.10. Facendo riferimento all' **Esempio 9.3.8** identifichiamo le proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ con le applicazioni lineari fratte. Sia $H \subset \mathbb{K}^2$ il sottospazio $H := \{(0, b)\}$ e quindi $\mathbb{P}(H) = \{\infty\}$. Un'applicazione lineare fratta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ x & \mapsto & \frac{dx+c}{bx+a} \end{array} \tag{9.3.1.13}$$

manda ∞ in se stesso se e solo se $b=0$ cioè se $\phi(x)=rx+s$ dove $r:=d/a$ e $s:=c/a$. Quindi (9.3.1.12) nel caso di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e il dato H diventa l'isomorpfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Stab}(\infty) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}) \\ \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right] & \mapsto & (x \mapsto (d/a)x + c/a) \end{array} \tag{9.3.1.14}$$

Esempio 9.3.11. Rendiamo esplicito l'isomorfismo (9.3.1.12) nel caso dello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e l'iperpiano all'infinito $H=\ker(X_0)$. Ricordiamo le identificazioni (9.2.1.4) e (9.2.1.5). Denotiamo $A\in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ con $A=(a_{ij})$ dove $0\le i,j\le n$. Abbiamo

$$\mathrm{Stab}(\mathbb{P}(H)) = \{[A]\in \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \mid 1=a_{00}, \quad 0=a_{01}=a_{02}=\ldots=a_{0n}\} \tag{9.3.1.15}$$

perchè se $[A]\in \mathrm{Stab}(\mathbb{P}(H))$ allora $a_{00}\neq 0$ e possiamo riscalare A moltiplicandolo per a_{00}^{-1}. L'affinità di $\mathbb{K}^n$ associata ad $[A]\in \mathrm{Stab}(\mathbb{P}(H))$ è data da $X\mapsto B\cdot X+C$ dove $B=(b_{ij})\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ è data da $b_{ij}=a_{ij}$ per $1\le i,j\le n$ e $C=(c_s)\in M_{n,1}(\mathbb{K})$ è data da $c_s=a_{s,0}$ per $1\le s\le n$ (ricordiamo che A è come in (9.3.1.15)).

9.3.2 Punti in posizione generale

Siano V e W spazi vettoriali. Una proiettività $F\colon \mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(W)$ è univocamente determinata dai suoi valori su un insieme finito di punti di $\mathbb{P}(V)$. Prima di precisare quest'affermazione introdurremo alcune considerazioni. Siano $P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{P}(V)$ e quindi esistono $v_i\in V$ per $i=1,\ldots,m$ tali che $P_i=[v_i]$. Siano $\mu_1,\ldots,\mu_m\in\mathbb{K}^*$. Se i vettori $v_1,\ldots,v_m$ sono linearmente dipendenti allora anche i vettori $\mu_1v_1,\ldots,\mu_mv_m$ sono linearmente dipendenti, e (quindi) se $v_1,\ldots,v_m$ sono linearmente indipendenti allora $\mu_1v_1,\ldots,\mu_mv_m$ sono linearmente indipendenti. Queste considerazioni mostrano che la seguente definizione è ben posta.

Definizione 9.3.12. Siano $P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{P}(V)$ e sia $P_i=[v_i]$ per $i=1,\ldots,m$. I punti $P_1,\ldots,P_m$ sono *linearmente dipendenti* se i vettori $v_1,\ldots,v_m$ sono linearmente dipendenti, sono linearmente indipendenti se i vettori $v_1,\ldots,v_m$ sono *linearmente indipendenti*.

Osservazione 9.3.13. Nella **Definizione 9.3.12** $P_1,\ldots,P_m$ va intesa come una *lista* di punti, con eventuali ripetizioni: in questo caso i vettori sono linearmente dipendenti.

Proposizione 9.3.14. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{P}(V)$ sono linearmente indipendenti allora $m\le(n+1)$.*

Dimostrazione. Sia $P_i=[v_i]$ per $i=1,\ldots,m$. Per ipotesi i vettori $v_1,\ldots,v_m$ sono linearmente indipendenti, siccome $\dim V=(n+1)$ segue che $m\le(n+1)$. □

Definizione 9.3.15. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio vettoriale di dimensione n. I punti $P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{P}(V)$ sono in *posizione generale* se vale una delle seguenti alternative:

1. $m\le(n+1)$ e $P_1,\ldots,P_m$ sono linearmente indipendenti,
2. $m>(n+1)$ e per *ogni* scelta di indici $1\le j_1<j_2<\ldots<j_{n+1}\le m$ i punti $P_{j_1},P_{j_2},\ldots,P_{j_{n+1}}$ sono linearmente indipendenti.

Notate che nella **Definizione 9.3.15** $P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{P}(V)$ va intesa come una *lista* di punti, con eventuali ripetizioni, vedi l'**Osservazione 9.3.13**.

Esempio 9.3.16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $(n+1)$ e $\{v_0,\ldots,v_n\}$ una sua base. Per $i=0,\ldots,n$ sia $P_i:=[v_i]\in\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. È chiaro che i punti $P_0,\ldots,P_n$ sono linearmente indipendenti. Sia

$$w:=(a_0v_0+a_1v_1+\ldots+a_nv_n), \qquad Q:=[w]\in\mathbb{P}(V). \tag{9.3.2.1}$$

I punti $P_0,\ldots,P_n,Q$ sono in posizione generale se e solo se $a_i\neq 0$ per $0\le i\le n$. Infatti supponiamo che $a_j=0$ per un certo $0\le j\le n$. Allora $P_0,\ldots,P_{j-1},P_{j+1},\ldots,P_n,Q$ sono linearmente dipendenti perchè $v_0,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_n,w$ *non* generano V, infatti appartengono al sottospazio proprio

$\langle v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_n \rangle$, quindi i punti $P_0, \ldots, P_n, Q$ *non* sono in posizione generale. Ora supponiamo che $a_i \neq 0$ per $0 \leq i \leq n$. Sia $0 \leq j \leq n$. I vettori $v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n, w$ generano V: infatti è evidente che $v_i \in \langle v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n, w \rangle$ se $i \neq j$ e $v_j \in \langle v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n, w \rangle$ perchè

$$v_j = a_j^{-1}(w - a_0 v_0 - \ldots - a_{j-1} v_{j-1} - a_j v_j - \ldots - a_n v_n). \tag{9.3.2.2}$$

Siccome $\dim V = (n+1)$ ne segue che $v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n, w$ sono linearmenre indipendenti, e quindi i punti $P_0, \ldots, P_{j-1}, P_{j+1}, \ldots, P_n, Q$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione 9.3.17. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n. I punti $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{P}(V)$ sono in posizione generale se e solo se ogni sottolista di lunghezza al più $(n+1)$ è fatta di punti linearmente indipendenti, cioè se dati comunque $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq m$ con $r \leq (n+1)$ si ha che $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$ sono linearmente indipendenti. In particolare se $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{P}(V)$ sono in posizione generale allora ogni sottolista di $P_1, \ldots, P_m$ è in posizione generale.

Lemma 9.3.18. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ punti in posizione generale. Esiste una base $\{v_0, \ldots, v_n\}$ di V tale che $P_i = [v_i]$ per $0 \leq i \leq n$ e $P_{n+1} = [v_0 + v_1 + \ldots + v_n]$.*

Dimostrazione. Siano $w_0, \ldots, w_n, u \in V$ tali che $P_i = [w_i]$ per $i = 0, \ldots, n$ e $P_{n+1} = [u]$. Siccome $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{P}(V)$ sono linearmente indipendenti $\{w_0, \ldots, w_n\}$ è una base di V. Quindi esiste $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$ tale che $u = (a_0 w_0 + a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n)$. Siccome $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ sono punti in posizione generale l'**Esempio 9.3.16** dà che $a_i \neq 0$ per $0 \leq i \leq n$. Poniamo $v_i := a_i w_i$ per $i = 0, \ldots, n$. Siccome $a_i \neq 0$ per $0 \leq i \leq n$ anche $\{v_0, \ldots, v_n\}$ è una base di V, e si ha che $P_{n+1} = [v_0 + v_1 + \ldots + v_n]$. □

Proposizione 9.3.19. *Siano V e W spazi vettoriali con $\dim V = \dim W = (n+1)$. Siano $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ e $Q_0, \ldots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$ liste di punti in posizione generale. Esiste una e una sola applicazione lineare $F \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che $F(P_i) = Q_i$ per $0 \leq i \leq (n+1)$.*

Dimostrazione. Per ipotesi e per il **Lemma 9.3.18** esistono basi $\{v_0, \ldots, v_n\}$ di V e $\{w_0, \ldots, w_n\}$ di W tali che $P_i = [v_i]$ e $Q_i = [w_i]$ per $i = 0, \ldots, n$ e $P_{n+1} = [v_0 + v_1 + \ldots + v_n]$ e $Q_{n+1} = [w_0 + w_1 + \ldots + w_n]$. L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}(W) \\ [x_0 v_0 + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n] & \mapsto & [x_0 w_0 + x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n] \end{array} \tag{9.3.2.3}$$

è un'applicazione lineare tale che $F(P_i) = Q_i$ per $0 \leq i \leq (n+1)$. Ora dimostriamo l'unicità di F. Supponiamo che $G \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ sia un'applicazione lineare tale che $G(P_i) = Q_i$ per $0 \leq i \leq (n+1)$. Allora $G = \mathbb{P}(g)$ dove $g(v_i) = \mu_i w_i$ per $0 \leq i \leq n$ e $g(v_0 + v_1 + \ldots + v_n) = \lambda(w_0 + v_1 + \ldots + w_n)$, dove $\mu_i \neq 0$ per $0 \leq i \leq n$ e $\lambda \neq 0$. Quindi

$$\mu_0 w_0 + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n = \lambda(w_0 + v_1 + \ldots + w_n). \tag{9.3.2.4}$$

Siccome $\{w_0, \ldots, w_n\}$ è una base di W segue che che $\mu_i = \lambda$ per $0 \leq i \leq n$ e quindi $F = G$. □

Corollario 9.3.20. *Siano V e W spazi vettoriali con $(n+1) = \dim V \leq \dim W$. Siano $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ in posizione generale. Un'applicazione lineare $F \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$* è determinata *dai valori $F(P_i)$ per $0 \leq i \leq (n+1)$.*

Dimostrazione. Sia $G \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ un'applicazione lineare tale che $F(P_i) = G(P_i)$ per $0 \leq i \leq (n+1)$: dobbiamo dimostrare che $F = G$. Siccome $F = \mathbb{P}(f)$ dove $f \colon V \to W$ è un'applicazione lineare iniettiva, i punti $F(P_0), F(P_1), \ldots, F(P_{n+1})$ generano un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$ di dimensione uguale alla dimensione di $\mathbb{P}(V)$ cioè n, e sono in posizione generale in $\mathbb{P}(U)$. Le applicazioni F e G in ducono applicazione lineari $\overline{F} \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(U)$ e $\overline{G} \colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(U)$: siccome $\dim V = \dim U$ la **Proposizione 9.3.19** dà che $\overline{F} = \overline{G}$ e quindi $F = G$. □

9.3.3 Coordinate omogenee, Teorema di Pappo

Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n. Siccome $\dim V = (n+1)$ esiste un isomorfismo $f\colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$: sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \\ [v] & \mapsto & [f(v)] \end{array} \tag{9.3.3.1}$$

l'isomorfismo indotto da f.

Definizione 9.3.21. Dato $P \in \mathbb{P}(V)$ abbiamo $F(P) = [a_0, \ldots, a_n]$ e il vettore $(a_0, \ldots, a_n)$ è determinato a meno di un fattore comune non-nullo. Le $a_0, \ldots, a_n$ sono le *coordinate omogenee* (o *proiettive*) di P determinate dall'isomorfismo (9.3.3.1). Diciamo anche che le proiezioni $X_i\colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ per $i = 0, \ldots, n$ (cioè la base standard del duale di $\mathbb{K}^{n+1}$) sono *coordinate omogenee* su $\mathbb{P}(V)$. Dato $[v] \in \mathbb{P}(V)$ le sue coordinate omogenee sono $X_0(v), \ldots, X_n(v)$ (ma anche $\lambda X_0(v), \ldots, \lambda X_n(v)$ per $\lambda \in \mathbb{K}^*$).

Notiamo che c'è un abuso della lingua: le coordinate omogenee di p *non* sono univocamente determinate da P, possiamo riscalarle per un fattore comune (non nullo).

Esempio 9.3.22. Sia $\mathbb{K}[x, y]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi *omogenei* di grado 2 in x, y a coefficienti in $\mathbb{K}$. La base $\{x^2, xy, y^2\}$ di $\mathbb{K}[x, y]_2$ determina un isomorfismo $f\colon \mathbb{K}[x, y]_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^3$. L'isomorfismo $\mathbb{P}(f)\colon \mathbb{P}(\mathbb{K}[x, y]_2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ definisce coordinate omogenee su $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x, y]_2)$. Le coordinate omogenee di $[(x+y)^2]$ sono $[1, 2, 1]$, ma anche $[3, 6, 3]$ o $[-1, -2, -1]$.

Osservazione 9.3.23. Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione n e $[X_0, \ldots, X_n]$, $[Y_0, \ldots, Y_n]$ coordinate omogenee su $\mathbf{P}$. Allora esiste $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ tale che per ogni $P \in \mathbf{P}$ abbiamo

$$[X(P)] = [A \cdot Y(P)] \tag{9.3.3.2}$$

dove $X(P)$, $Y(P)$ sono i vettori colonna delle coordinate omogenee di P nel primo e secondo sistema di riferimento rispettivamente. Infatti per definizione esistono isomorfismi $F, G\colon \mathbf{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tali che $[X(P)] = F(P)$ e $[Y(P)] = G(P)$. L'automorfismo $F \circ G^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ è dato da $\mathbb{P}(\phi)$ dove $\phi\colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Esiste $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ tale che $\phi(Z) = A \cdot Z$ ed è chiaro che (9.3.3.2) vale con questa A. Inoltre la **Proposizione 9.3.7** dà che la matrice A di cambiamento di coordinate è determinata a meno di moltiplicazione per uno scalare non nullo.

Definizione 9.3.24. Siano $X_0, \ldots, X_n$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$, e quindi $X_i\colon V \to \mathbb{K}$ è un'applicazione lineare per $i = 0, \ldots, n$. Poniamo

$$\mathbb{P}(V)_{X_i} := (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\langle \ker X_i \rangle)) \tag{9.3.3.3}$$

Quindi $\mathbb{P}(V)_{X_i}$ è in modo naturale uno spazio affine.

Osservazione 9.3.25. Siano $X_0, \ldots, X_n$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$. Allora coordinate affini su $\mathbb{P}(V)_{X_0}$ sono date da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V)_{X_0} & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \\ [v] & \mapsto & \left(\frac{X_1(v)}{X_0(v)}, \frac{X_2(v)}{X_0(v)}, \ldots, \frac{X_n(v)}{X_0(v)}\right) \end{array} \tag{9.3.3.4}$$

e similmente per $\mathbb{P}(V)_{X_i}$.

Un modo per dare un isomorfismo (9.3.3.1) è quello di scegliere una base di V. Notate che se riscaliamo i vettori della base per un fattore comune le coordinate omogenee non cambiano. Ora ci chiediamo come scegliere un isomorfismo (9.3.3.1) "vedendo solo i punti di $\mathbb{P}(V)$" (e non i vettori di V). La risposta è nella **Proposizione 9.3.19**. Infatti siano $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ punti in posizione generale. Siccome i punti

$$Q_0 := [1, 0, \ldots, 0],\ Q_1 := [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots,\ Q_n := [0, 0, \ldots, 0, 1],\ Q_{n+1} := [1, 1, \ldots, 1, 1] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \tag{9.3.3.5}$$

sono in posizione generale (vedi l' **Esempio 9.3.16**) allora per la **Proposizione 9.3.19** esiste un unico isomorfismo $F\colon \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tale che $F(P_i) = Q_i$ per $0 \le i \le (n+1)$.

Definizione 9.3.26. Il sistema di coordinate omogenee individuato (come sopra) dalla scelta dei punti $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ in posizione generale è denotato $\mathcal{R}(P_0, \ldots, P_{n+1})$. I punti $P_0, \ldots, P_n$ sono i *punti fondamentali* del riferimento, il punto P_{n+1} è il suo *punto unità*.

Una volta scelto un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$ ogni problema riguardante sottospazi lineari di $\mathbb{P}(V)$ si traduce in un problema riguardante sistemi di equazioni lineari omogenee nelle coordinate omogenee - ricordate che i sottospazi lineari di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si descrivono per mezzo di equazioni cartesiane. Diamo una dimostrazione "in coordinate" del seguente classico risultato di Geometria Proiettiva.

Teorema 9.3.27 (di Pappo)**.** *Sia* $\mathbf{P}$ *un piano proiettivo e* $P_1, \ldots, P_6 \in \mathbf{P}$ *punti distinti tali che:*

1. *sia* P_1, P_3, P_5 *che* P_2, P_4, P_6 *sono allineati ma la retta contenente* P_1, P_3, P_5 *è distinta dalla retta contenente* P_2, P_4, P_6*,*
2. *nessuno dei* P_i *è nell'intersezione della retta contenente* P_1, P_3, P_5 *con la retta contenente* P_2, P_4, P_6*.*

Allora i punti

$$\langle P_1, P_2\rangle \cap \langle P_4, P_5\rangle, \quad \langle P_2, P_3\rangle \cap \langle P_5, P_6\rangle, \quad \langle P_3, P_4\rangle \cap \langle P_6, P_1\rangle \tag{9.3.3.6}$$

(notate che per le ipotesi $\langle P_1, P_2\rangle \neq \langle P_4, P_5\rangle$ *etc.) sono allineati.*

Dimostrazione. Per le ipotesi i punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale. Quindi abbiamo il riferimento proiettivo $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3, P_4)$. Siano $[a_0, a_1, a_2]$ e $[b_0, b_1, b_2]$ le coordinate omogenee di P_5 e P_6 rispettivamente. Abbiamo le seguenti equazioni cartesiane (nelle coordinate omogenee del riferimento $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3, P_4)$):

$$\langle P_1, P_3\rangle : X_1 = 0, \quad \langle P_2, P_4\rangle : X_0 - X_2 = 0. \tag{9.3.3.7}$$

Siccome P_1, P_3, P_5 sono allineati abbiamo che $a_1 = 0$, e siccome P_2, P_4, P_6 sono allineati abbiamo che $b_0 = b_2$. Inoltre vediamo che il punto d'intersezione di $\langle P_1, P_3\rangle$ e $\langle P_2, P_4\rangle$ ha coordinate $[1, 0, 1]$. Siccome $P_5 \notin \{P_1, P_3\}$ e non è $\langle P_1, P_3\rangle \cap \langle P_2, P_4\rangle$ ne segue che P_5 ha coordinate $[a_0, 0, 1]$ con $a_0 \neq 0$. Similmente abbiamo che P_6 ha coordinate $[1, b_1, 1]$ con $b_1 \neq 0$. Un facile calcolo dà le seguenti equazioni cartesiane:

$$\langle P_1, P_2\rangle\colon\ X_2 = 0, \qquad \langle P_2, P_3\rangle\colon\ X_0 = 0,$$
$$\langle P_3, P_4\rangle\colon\ X_0 - X_1 = 0, \qquad \langle P_4, P_5\rangle\colon\ X_0 + (a_0 - 1)X_1 - a_0 X_2 = 0,$$
$$\langle P_5, P_6\rangle\colon\ b_1 X_0 + (a_0 - 1)X_1 - a_0 b_1 X_2 = 0, \qquad \langle P_6, P_1\rangle\colon\ X_1 - b_1 X_2 = 0.$$

Segue che

$$\langle P_1, P_2\rangle \cap \langle P_4, P_5\rangle = \{[1 - a_0, 1, 0]\}, \tag{9.3.3.8}$$
$$\langle P_2, P_3\rangle \cap \langle P_5, P_6\rangle = \{[0, a_0 b_1, a_0 - 1]\}, \tag{9.3.3.9}$$
$$\langle P_3, P_4\rangle \cap \langle P_6, P_1\rangle = \{[b_1, b_1, 1]\} \tag{9.3.3.10}$$

Siccome

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1 - a_0 & 1 & 0 \\ 0 & a_0 b_1 & a_0 - 1 \\ b_1 & b_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.3.3.11}$$

segue che i punti di (9.4.2.1) sono allineati. □

Osservazione 9.3.28. Possiamo pensare i punti $P_1, \ldots, P_6$ del teorema di Pappo come i vertici di un esagono. Le intersezioni di (9.4.2.1) sono le intersezioni tra lati opposti dell'esagono. La (9.2) dà una rappresentazione grafica del contenuto Teorema di Pappo.

9.3.4 Birapporto, proiettività di una retta

Dato uno spazio proiettivo $\mathbf{P}$ e due collezioni di punti $P_1, \ldots, P_r$ e $Q_1, \ldots, Q_r$ di $\mathbf{P}$, come possiamo stabilire se esiste una proiettività $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{P})$ tale che $F(P_i) = Q_i$ per $i = 1, \ldots, r$? Consideriamo il caso di una retta. Se $r \leq 3$ la risposta è semplice: gli insiemi sono equivalenti se e solo se hanno le stesse ripetizioni, cioè se i P_i sono distinti e così anche i Q_i allora sono equivalenti, se $P_1 = P_2$ e $P_2 \neq P_3$ e analogamente per i Q_i allora sono equivalenti, etc. Infatti questo segue dalla **Proposizione 9.3.19**. Il primo caso interessante è quello di 4 punti $P_1, \ldots, P_4$. Scegliamo coordinate omogenee $[Z, X]$ su $\mathbf{P}$ e siano $[Z_i, X_i]$ le coordinate omogenee di P_i. Supponiamo che non esistano 3 indici distinti tali che i punti corrispondenti siano uguali e consideriamo il seguente *birapporto*

$$\frac{\det \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_4 & X_4 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_3 & X_3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_3 & X_3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_4 & X_4 \end{bmatrix}} \tag{9.3.4.1}$$

Osserviamo che numeratore e denominatore non sono entrambi nulli. Infatti se il numeratore si annulla allora $P_1 = P_4$ oppure $P_2 = P_3$, e per le nostre ipotesi segue che $P_1 \neq P_3$ e $P_2 \neq P_4$ e perciò il denominatore non è nullo; un ragionamento analogo mostra che se il numeratore si annulla allora il denominatore non è nullo. Siccome numeratore e denominatore non sono entrambi nulli il birapporto può essere considerato un elemento di $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ (è infinito se il denominatore si annulla).

Osservazione 9.3.29. Le coordinate del punto P_i non sono univocamente determinate perchè possiamo riscalarle per un fattore $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ma l'espressione (9.3.4.3) rimane invariata perchè sostituendo la coppia (Z_i, X_i) con $(\lambda Z_i, \lambda X_i)$ sia il numeratore che il denominatore vengono moltiplicati per λ.

Proposizione 9.3.30. *Il birapporto dei punti $P_1, \ldots, P_4$ non dipende dalle coordinate omogenee scelte.*

Dimostrazione. Siano $[Z', X']$ altre coordinate omogenee su $\mathbf{P}$. Per l' **Osservazione 9.3.23** esiste una $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tale che per ogni $P \in \mathbf{P}$ si abbia

$$\begin{bmatrix} Z'(P) \\ X'(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z(P) \\ X(P) \end{bmatrix} \tag{9.3.4.2}$$

L'uguaglianza è a meno di un fattore scalare non nullo ma per l' **Osservazione 9.3.29** possiamo assumere che valga l'uguaglianza. Siccome ciascun determinante che appare nella (9.3.4.3) viene moltiplicato per $\det A$ il birapporto rimane invariato. □

La **Proposizione 9.3.30** permette di dare la seguente definizione.

Definizione 9.3.31. Sia $\mathbf{P}$ una retta proiettiva e $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbf{P}$ tali che non esistano 3 indici distinti i cui punti corrispondenti siano uguali. Il birapporto di $P_1, \ldots, P_4$ è l'elemento di $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ dato da

$$\beta(P_1, \ldots, P_4) := \frac{\det \begin{bmatrix} Z(P_1) & X(P_1) \\ Z(P_4) & X(P_4) \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z(P_2) & X(P_2) \\ Z(P_3) & X(P_3) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} Z(P_1) & X(P_1) \\ Z(P_3) & X(P_3) \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z(P_2) & X(P_2) \\ Z(P_4) & X(P_4) \end{bmatrix}} \tag{9.3.4.3}$$

dove $[Z, X]$ è un arbitrario sistema di coordinate omogenee su $\mathbf{P}$.

Esempio 9.3.32. Il birapporto dei punti $[1, 0], [0, 1], [1, 1], [Z_4, X_4] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ è

$$\beta(P_1, \ldots, P_4) := X_4/Z_4. \tag{9.3.4.4}$$

Osservazione 9.3.33. Sia $\mathbf{P}$ una retta proiettiva. Siano $[Z, X]$ coordinate omogenee su $\mathbf{P}$ e quindi $x := X/Z$ è una coordinata affine sulla retta affine $(\mathbf{P} \setminus \{[0, 1]\})$. Il birapporto dei punti $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbf{P}$ si può scrivere

$$\beta(P_1, \ldots, P_4) := \frac{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}. \tag{9.3.4.5}$$

Lemma 9.3.34. *Sia* $\mathbf{P}$ *una retta proiettiva e* $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbf{P}$ *tali che non esistono tre indici i cui punti corrispondenti coincidono. Allora esiste una ripetizione, cioè indici distinti* i, j *con* $P_i = P_j$ *se e solo se* $\beta(P_1, \ldots, P_4) \in \{0, 1, \infty\}$.

Dimostrazione. Un facile calcolo dà che

$$\beta(P,P_2,P_3,P)=\beta(P_1,P,P,P_4)=0, \quad \beta(P,P,P_3,P_4)=\beta(P_1,P_2,P,P)=1, \quad \beta(P,P_2,P,P_4)=\beta(P_1,P,P_3,P)=\infty, \tag{9.3.4.6}$$

e quindi se c'è una ripetizione allora $\beta(P_1, \ldots, P_4) \in \{0, 1, \infty\}$. Ora supponiamo che $\beta(P_1, \ldots, P_4) \in \{0, 1, \infty\}$ e dimostriamo che c'è una ripetizione. Possiamo supporre che non ci siano ripetizioni tra P_1, P_2, P_3 (altrimenti non c'è nulla da dimostrare) e quindi P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale. Siano $[Z, X]$ le coordinate omogenee per il riferimento $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3)$. Per l'**Esempio 9.3.32** e l'ipotesi si ha che

$$X(P_4)/Z(P_4) = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) \in \{0, \infty, 1\}. \tag{9.3.4.7}$$

Siccome $X(P_1)/Z(P_1) = 0$, $X(P_2)/Z(P_2) = \infty$, e $X(P_3)/Z(P_3) = 1$ segue che $P_4 \in \{P_1, P_2, P_3\}$. □

Proposizione 9.3.35. *Siano* $\mathbb{P}(V)$ *e* $\mathbb{P}(W)$ *rette proiettive. Siano* $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ *e* $Q_1, \ldots, Q_4 \in \mathbb{P}(W)$ *tali che non esistano* 3 *indici distinti i cui punti corrispondenti* P_i *siano uguali e analogamente per i* Q_j. *Se esiste un isomorfismo* $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *tale che* $F(P_i) = Q_i$ *per* $i = 1, \ldots, 4$ *allora* $\beta(P_1, \ldots, P_4) = \beta(Q_1, \ldots, Q_4)$. *Il viceversa vale se i birapporti non appartengono a* $\{0, 1, \infty\}$, *cioè se* $\beta(P_1, \ldots, P_4) = \beta(Q_1, \ldots, Q_4)$ *e*

$$\beta(P_1, \ldots, P_4) \notin \{0, 1, \infty\} \tag{9.3.4.8}$$

esiste un isomorfismo $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ *tale che* $F(P_i) = Q_i$ *per* $i = 1, \ldots, 4$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista un isomorfismo $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che $F(P_i) = Q_i$ per $i = 1, \ldots, 4$. Sia $G\colon \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ un isomorfismo e $[Z, X]$ le coordinate omogenee corrispondenti. L'isomorfismo $G \circ F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ definisce coordinate omogenee $[Z', X']$. Per ipotesi $F(P_i) = Q_i$ per $i = 1, \ldots, 4$ e quindi $[Z'(P_i), X'(P_i)] = [Z(Q_i), X(Q_i)]$: ne segue che $\beta(P_1, \ldots, P_4) = \beta(Q_1, \ldots, Q_4)$. Ora dimostriamo il parziale viceversa. Siccome vale (9.3.4.8) il **Lemma 9.3.34** dà che P_1, P_2, P_3 sono distinti e così Q_1, Q_2, Q_3. Siano $[Z, X]$, $[Z', X']$ coordinate omogenee dei riferimenti $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3)$ e $\mathcal{R}(Q_1, Q_2, Q_3)$ su $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente. Per l'**Esempio 9.3.32** abbiamo che le coordinate $[Z, X]$ di $P_1, \ldots, P_4$ sono rispettivamente

$$[1, 0], \qquad [0, 1], \qquad [1, 1], \qquad [1, \beta(P_1, \ldots, P_4)] \tag{9.3.4.9}$$

e le coordinate $[Z', X']$ di $Q_1, \ldots, Q_4$ sono rispettivamente

$$[1, 0], \qquad [0, 1], \qquad [1, 1], \qquad [1, \beta(Q_1, \ldots, Q_4)]. \tag{9.3.4.10}$$

Siccome $\beta(P_1, \ldots, P_4) = \beta(Q_1, \ldots, Q_4)$ le coordinate $[Z, X]$ di $P_1, \ldots, P_4$ sono uguali alle coordinate $[Z', X']$ di $Q_1, \ldots, Q_4$. Siano $G\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e $H\colon \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ gli isomorfismi corrispondenti ai riferimenti $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3)$ e $\mathcal{R}(Q_1, Q_2, Q_3)$ rispettivamente. L'isomorfismo $F := H^{-1} \circ G$ è tale che $F(P_i) = Q_i$ per $i = 1, \ldots, 4$. □

Chiudiamo questa sezione studiando le proiettività di una retta proiettiva sotto l'ipotesi che il campo $\mathbb{K}$ sia *algebricamente chiuso*, per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposizione 9.3.36. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo algebricamente chiuso e* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *di dimensione* 2. *Sia* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$. *Allora vale una delle seguenti alternative:*

1. F *è l'identità.*
2. *Esistono coordinate omogenee* $[X_0, X_1]$ *su* $\mathbb{P}(V)$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tali che* $F([X_0, X_1]) = [X_0, \lambda X_1]$, *cioè se* P *ha coordinate omogenee* $[X_0, X_1]$ *allora* $F(P)$ *ha coordinate omogenee* $[X_0, \lambda X_1]$.
3. *Esistono coordinate omogenee* $[X_0, X_1]$ *su* $\mathbb{P}(V)$ *e* $\mu \in \mathbb{K}^*$ *tali che* $F([X_0, X_1]) = [X_0, \mu X_0 + X_1]$

Dimostrazione. Per definizione $F = \mathbb{P}(f)$ dove $f\colon V \to V$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Possiamo supporre che F non sia l'identità. Siccome $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso il polinomio caratteristico p_f ha due radici distinte o una radice con molteplicità due. Supponiamo che p_f abbia due radici distinte. Allora esiste una base $\{v_0, v_1\}$ di V con v_0, v_1 autovettori di autovalori α_0, α_1 non-nulli e diversi tra loro. La base $\{v_0, v_1\}$ determina coordinate omogenee X_0, X_1 e si ha che

$$F([X_0, X_1]) = [\alpha_0 X_0, \alpha_1 X_1] = [X_0, \alpha_0^{-1}\alpha_1 X_1], \tag{9.3.4.11}$$

quindi vale (2) con $\lambda = \alpha_0^{-1}\alpha_1$. Ora supponiamo che p_f abbia una radice, λ, con molteplicità due. Sia v_0 un autovettore di f ed estendiamolo a una base $\{v_0, v_1\}$ di V: siano Y_0, Y_1 le corrispondenti coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$. Esiste una matrice 2×2 invertibile $A = (a_{ij})$ tale che

$$F([Y_0, Y_1]) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix}. \tag{9.3.4.12}$$

Siccome $F([1, 0]) = [1, 0]$ abbiamo che $a_{21} = 0$, e siccome p_f ha una radice con moletplicità due abbiamo che $a_{11} = a_{22}$, e siccome A è invertibile $a_{11} \neq 0$. Quindi esistono $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e $\nu \in \mathbb{K}$ tali che

$$F([Y_0, Y_1]) = \begin{bmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix}. \tag{9.3.4.13}$$

Siccome F non è l'identità $\nu \neq 0$; sostituendo a v_0 il vettore νv_0 possiamo supporre che $\nu = 1$. Ora cambiamo coordinate omogenee: poniamo $X_0 = Y_1$ e $X_1 = Y_0$. Allora

$$F([X_0, X_1]) = [\lambda X_0, X_0 + \lambda X_1] = [X_0, \lambda^{-1} X_0 + X_1], \tag{9.3.4.14}$$

quindi vale (3) con $\mu = \lambda^{-1}$. □

Osservazione 9.3.37. I tre casi della **Proposizione 9.3.36** sono distinti dal numero di *punti fissi*, cioè i punti $P \in \mathbb{P}(V)$ tali che $F(P) = P$. Se F è l'identità ogni punto è fisso, se vale (2) esistono due punti fissi, i punti fondamentali del sistema di riferimento con coordinate $[X_0, X_1]$, se vale (3) esiste un punto fisso, quello con coordinate $[0, 1]$. Notiamo anche che siccome $F([0, 1]) = [0, 1]$ in ciascuno dei tre casi la F definisce un'affinità $f\colon \mathbb{P}^1_{X_0} \to \mathbb{P}^1_{X_0}$. Se x è la coordinata affine $x := X_1/X_0$ abbiamo che

1. $f(x) = x$ se vale (1) della **Proposizione 9.3.36**,
2. $f(x) = \lambda x$ con $\lambda \neq 1$ se vale (2) della **Proposizione 9.3.36**, e
3. $f(x) = x + \mu$ se vale (3) della **Proposizione 9.3.36**.

9.3.5 Proiezioni, Teorema di Desargues

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Se f è iniettiva le associamo l'applicazione lineare $\mathbb{P}(f)\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$. In generale sia $\rho\colon V \to V/\ker f$ l'applicazione quoziente e $\overline{f}\colon V/\ker f \to W$ l'applicazione lineare indotta da f: allora f è la composizione delle applicazioni lineari

$$V \xrightarrow{\rho} V/\ker f \xrightarrow{\overline{f}} W. \tag{9.3.5.1}$$

Siccome $\overline{f}$ è iniettiva le possiamo associare l'applicazione lineare $\mathbb{P}(\overline{f})\colon \mathbb{P}(V/\ker f) \to \mathbb{P}(W)$. Alla ρ, o meglio al sottospazio $\ker f$, associeremo un'applicazione chiamata proiezione. Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale e

$$\rho\colon V \to V/U \tag{9.3.5.2}$$

l'applicazione quoziente: la *proiezione di* $\mathbb{P}(V)$ *con centro* $\mathbb{P}(U)$ è l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) & \xrightarrow{\pi_U} & \mathbb{P}(V/U) \\ [v] & \mapsto & [\rho(v)] \end{array} \tag{9.3.5.3}$$

Notate che (9.3.5.3) è ben definita perchè se $\lambda \in \mathbb{K}^*$ allora $\rho(\lambda v) = \lambda\rho(v)$.

Esempio 9.3.38. La proiezione di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ con centro il punto $P := [0, 0, \ldots, 0, 1]$ può essere identificata con l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \{P\}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}} \\ [X_0, \ldots, X_n] & \mapsto & [X_0, \ldots, X_{n-1}] \end{array} \tag{9.3.5.4}$$

Infatti il duale di $\mathbb{K}^{n+1}/\langle(0, 0, \ldots, 0, 1)\rangle$ è naturalmente identificato con il sottospazio $\mathrm{Ann}(0, 0, \ldots, 0, 1) \subset (\mathbb{K}^{n+1})^\vee$ i cui elementi sono le funzioni lineari φ tali che $\varphi(0, 0, \ldots, 0, 1) = 0$. La base di $\mathrm{Ann}(0, 0, \ldots, 0, 1)$ data da $\{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$ definisce un isomorfismo tra $\mathrm{Ann}(0, 0, \ldots, 0, 1)$ e $\mathbb{K}^n$: dato questo isomorfismo la proiezione $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \{P\}) \to \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}/\langle(0, 0, \ldots, 0, 1)\rangle)$ è identificata con (9.3.5.4).

Osservazione 9.3.39. Siano $Q_1, \ldots, Q_r \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U))$: allora

$$\dim(\langle \pi_U(Q_1), \ldots, \pi_U(Q_r)\rangle) \le \dim(\langle Q_1, \ldots, Q_r\rangle). \tag{9.3.5.5}$$

La corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V/U) & \longrightarrow & \{\mathbb{P}(S) \subset \mathbb{P}(V) \mid S \subset V \text{ sottospazio}, \dim S = (\dim U + 1), S \supset U\} \\ [x] & \mapsto & \mathbb{P}(\rho^{-1}(\langle x\rangle)) \end{array} \tag{9.3.5.6}$$

dà all'insieme dei sottospazi lineari di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione uguale a $\dim U$ contenenti $\mathbb{P}(U)$ una struttura di spazio proiettivo. Componendo (9.3.5.6) con (9.3.5.3) otteniamo la versione geometrica della proiezione di $\mathbb{P}(V)$ con centro $\mathbb{P}(U)$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) & \longrightarrow & \{\mathbb{P}(S) \subset \mathbb{P}(V) \mid S \subset V \text{ sottospazio}, \dim S = (\dim U + 1), S \supset U\} \\ Q & \mapsto & \langle \mathbb{P}(U) \cup \{Q\}\rangle \end{array} \tag{9.3.5.7}$$

Ora supponiamo che $T \subset V$ sia un sottospazio trasverso a U, cioè tale che V sia somma diretta di U e T. La restrizione di ρ a T è un isomorfismo $T \xrightarrow{\sim} V/U$ e quindi identifica $\mathbb{P}(V/U)$ con $\mathbb{P}(T)$, perciò possiamo identificare la proiezione (9.3.5.3) con un'applicazione $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) \to \mathbb{P}(T)$. Grazie a (9.3.5.7) la descrizione geometrica di quest'applicazione è

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) & \overset{\pi_{U,T}}{\longrightarrow} & \mathbb{P}(T) \\ Q & \mapsto & \langle \mathbb{P}(U) \cup \{Q\}\rangle \cap \mathbb{P}(T) \end{array} \tag{9.3.5.8}$$

Esempio 9.3.40. Se il centro della proiezione è un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ allora $\mathbb{P}(T)$ è un iperpiano. Possiamo pensare che P sia una sorgente di luce ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim \mathbb{P}(V) = 3$). L'immagine di un punto $Q \in (\mathbb{P}(V) \setminus \{P\})$ è l'ombra *proiettata* dalla sorgente di luce P sul piano $\mathbb{P}(T)$ - da qui il nome proiezione.

Esempio 9.3.41. Supponiamo che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim V = 4$ e il centro della proiezione è un punto $P \in \mathbb{P}(V)$. Quindi $\mathbb{P}(T)$ è un piano. Possiamo pensare che P sia l'occhio di un pittore e che $\mathbb{P}(T)$ sia il quadro su cui il pittore dipinge (opportunamente prolungato all'infinito in ogni direzione). L'immagine di un punto $Q \in (\mathbb{P}(V) \setminus \{P\})$ è il punto che rappresenta Q sul quadro $\mathbb{P}(T)$.

Ora supponiamo che che $T' \subset V$ sia un altro sottospazio trasverso a U. La composizione

$$\pi_{U,T'} \circ \pi^{-1}_{U,T} \colon \mathbb{P}(T) \to \mathbb{P}(T') \tag{9.3.5.9}$$

è un isomorfismo di spazi proiettivi e si chiama *prospettività*. Applicheremo l'idea della proiezione per dimostrare il classico Teorema di Desargues. Un *triangolo* in uno spazio proiettivo consiste di tre punti *non allineati*: i punti P_i sono i vertici del triangolo, le rette $\langle P_i, P_j\rangle$ per $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ sono i *lati* del triangolo.

Teorema 9.3.42 (di Desargues)**.** *Siano P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3 triangoli in un piano proiettivo $\mathbf{P}$. Supponiamo che vertici e lati corrispondenti*[1] *dei triangoli siano distinti e che esista $O \in \mathbf{P}$, distinto dai vertici dei triangoli, contenuto nelle rette $\langle P_i, Q_i\rangle$ per $i = 1, 2, 3$. Allora le intersezioni dei lati corrispondenti*

$$\langle P_1, P_2\rangle \cap \langle Q_1, Q_2\rangle, \qquad \langle P_2, P_3\rangle \cap \langle Q_2, Q_3\rangle, \qquad \langle P_3, P_1\rangle \cap \langle Q_3, Q_1\rangle \tag{9.3.5.10}$$

sono allineate.

[1] I vertici P_i e Q_j sono corrispondenti se $i = j$, i lati $\langle P_i, P_j\rangle$ e $\langle P_k, P_h\rangle$ sono corrispondenti se $\{i, j\} = \{k, h\}$.

Dimostrazione. Esiste uno spazio vettoriale W di dimensione 3 tale che $\mathbf{P} = \mathbb{P}(W)$. Sia $V := W \oplus \mathbb{K}$: allora $\dim \mathbb{P}(V) = 3$ e $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ è un piano. Supponiamo che esistano $R, O' \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$, rette $L'_1, L'_2, L'_3 \subset \mathbb{P}(V)$ *non coplanari* contenenti O' e triangoli P'_1, P'_2, P'_3 e Q'_1, Q'_2, Q'_3 in $\mathbb{P}(V)$ tali che

1. per ogni $1 \le i \le 3$ si ha che $P'_i, Q'_i \in (L'_i \setminus \{O'\})$,
2. la proiezione $\pi\colon (\mathbb{P}(V) \setminus \{R\}) \to \mathbb{P}(W)$ di centro R manda $P'_1, P'_2, P'_3, Q'_1, Q'_2, Q'_3$ nei punti $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ rispettivamente.

In altre parole supponimao che i dati triangoli in $\mathbf{P}$ siano ottenuti proiettando da R triangoli con la proprietà che le rette congiungenti vertci corrispondenti sono concorrenti. Allora i punti di (9.3.5.10) sono allineati. Infatti per ogni $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ le rette $\langle P'_i, P'_j \rangle$ e $\langle Q'_i, Q'_j \rangle$ appartengono al piano $\langle L'_i, L'_j \rangle$ e quindi si incontrano in un punto S'_{ij} (notate che $L'_i \neq L'_j$ perchè se fossero uguali allora sarebbero uguali i lati $\langle P_i, P_j \rangle$ e $\langle Q_i, Q_j \rangle$, contro le nostre ipotesi). I punti $S'_{12}, S'_{23}, S'_{31}$ appartengono all'intersezione dei piani $\langle P'_1, P'_2, P'_3 \rangle$ e $\langle Q'_1, Q'_2, Q'_3 \rangle$, e questi piani sono distinti perchè le rette $L'_1, L'_2, L'_3 \subset \mathbb{P}(V)$ non sono coplanari. Quindi $S'_{12}, S'_{23}, S'_{31}$ appartengono alla retta d'intersezione dei piani $\langle P'_1, P'_2, P'_3 \rangle$ e $\langle Q'_1, Q'_2, Q'_3 \rangle$ e perciò anche le loro proiezioni su $\mathbb{P}(W)$ dal punto R sono punti allineati. Ma la proiezione di S'_{ij} è uguale a $\langle P_i, P_j \rangle \cap \langle Q_i, Q_j \rangle$ e perciò i punti di (9.3.5.10) sono allineati. Si finisce la dimostrazione del teorema di Desargues facendo vedere che esistono sempre R, O', $L'_1, L'_2, L'_3 \subset \mathbb{P}(V)$ e triangoli P'_1, P'_2, P'_3 e Q'_1, Q'_2, Q'_3 in $\mathbb{P}(V)$ come sopra - lasciamo i dettagli al lettore. □

La figura (9.3) illustra il contenuto del Teorema di Desargues.

9.4 Dualità

Sia $\mathbf{P}$ un piano proiettivo. Un punto $p \in \mathbf{P}$ e una retta $L \subset \mathbf{P}$ sono *incidenti* se $p \in L$. La nozione di dualità nasce dall'osservazione che la relazione di incidenza si comporta in modo simmetrico: se $p_1 \neq p_2 \in \mathbf{P}$ allora esiste una e una sola retta incidente sia a p_1 che a p_2, ma d'altra parte se $L_1 \neq L_2 \subset \mathbf{P}$ sono rette esiste uno e un solo punto incidente sia a L_1 che a L_2.

9.4.1 Il duale di uno spazio proiettivo

Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo. Il *duale* di $\mathbf{P}$ è l'insieme $\mathbf{P}^\vee$ degli *iperpiani* di $\mathbf{P}$, cioè dei suoi sottospazi di codimensione 1:

$$\mathbf{P}^\vee := \{H \subset \mathbf{P} \mid H \text{ è un sottospazio di codimensione } 1\}. \tag{9.4.1.1}$$

Identificheremo $\mathbf{P}^\vee$ in modo naturale con il proiettificato di uno spazio vettoriale. Per definizione $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V)$ per un qualche spazio vettoriale V. Sia $V^\vee$ lo spazio vettoriale duale di V: quindi gli elemnti di $V^\vee$ sono funzioni lineari $f\colon V \to \mathbb{K}$. Se $[f] \in \mathbb{P}(V^\vee)$ allora $f \neq 0$ e quindi $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V di codimensione 1. Se $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ allora $\ker(\lambda f) = \ker f$. Quindi abbiamo un'applicazione lineare ben definita

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V^\vee) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}(V)^\vee \\ [f] & \mapsto & \mathbb{P}(\ker f) \end{array} \tag{9.4.1.2}$$

Proposizione 9.4.1. *L'applicazione* (9.4.1.2) *è biunivoca.*

Dimostrazione. La proposizione segue subito dalla **Proposizione 4.6.5**. Diamo una dimostrazione exnovo per comodità del lettore. Sia $H \in \mathbb{P}(V)^\vee$, cioè $H \subset \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio di codimensione 1. Per definizione esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ di codimensione 1 tale che $H = \mathbb{P}(W)$. Siccome W è un sottospazio vettoriale di V di codimensione 1 esiste $f \in V^\vee$ tale che $W = \ker f$ (estendiamo una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di W a una base $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ di V e poniamo $f := w_0^\vee$) e quindi $H = \Phi([f])$. Questo dimostra che Φ è suriettiva. Ora dimostriamo che Φ è iniettiva. Supponiamo che $\Phi([f]) = \Phi([g])$: dobbiamo dimostrare che f e g sono linearmente dipendenti. Supponiamo per assurdo che f e g siano linearmente indipendenti. Sia $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V: quindi $f(\sum_{i=0}^n x_i v_i) = \sum_{i=0}^n a_i x_i$ e

$g(\sum_{i=0}^n x_i v_i) = \sum_{i=0}^n b_i x_i$. Per l'ipotesi che f e g sono linearmente indipendenti i vettori $(a_0, \ldots, a_n)$ e $(b_0, \ldots, b_n)$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ sono linearmente indipendenti: segue che le soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee

$$0 = \sum_{i=0}^n a_i x_i = \sum_{i=0}^n b_i x_i \tag{9.4.1.3}$$

ha codimensione 2 in $\mathbb{K}^{n+1}$ ovvero che $\ker(f) \neq \ker(g)$. Questo contraddice l'ipotesi $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Siccome siamo arrivati a un assurdo supponendo che f e g siano linearmente indipendenti, segue che f e g sono linearmente dipendenti. □

Quindi la (9.4.1.2) dà a $\mathbf{P}^\vee$ una struttura di spazio proiettivo. Chiediamoci la seguente domanda: quali sono i sottospazi proiettivi di $\mathbf{P}^\vee$? Esiste una risposta sibillline: un sottoinsieme è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)^\vee$ se è la proiettificazione di un sottospazio vettoriale di $V^\vee$. Il punto è che esiste una descrizione "visibile" dei sottospazi proiettivi del duale. Dato un sottospazio proiettivo $L \subset \mathbf{P}$ poniamo

$$\mathrm{Ann}(L) := \{H \in \mathbf{P}^\vee \mid H \supset L\}. \tag{9.4.1.4}$$

Osservazione 9.4.2. Sia V uno spazio vettoriale e $W \subset V$ un sottospazio. Quindi abbiamo $\mathrm{Ann}(W) \subset V^\vee$ e $\mathrm{Ann}(\mathbb{P}(W)) \subset \mathbb{P}(V)^\vee$: segue dalle definizioni che $\mathrm{Ann}(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(W))$. Inoltre

$$\dim \mathrm{Ann}(\mathbb{P}(W)) = \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) - 1 \tag{9.4.1.5}$$

per la **Proposizione 4.6.5**.

Proposizione 9.4.3. *Un sottoinsieme $Z \subset \mathbf{P}^\vee$ è un sottospazio proiettivo se e solo se esiste un sottospazio proiettivo $L \subset \mathbf{P}$ tale che $Z = \mathrm{Ann}(L)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V)$. Se $L = \mathbb{P}(W)$ dove $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale allora $\mathrm{Ann}(L)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ per l'**Osservazione 9.4.2**. Viceversa sia $Z \subset \mathbb{P}(V)^\vee$ un sottospazio proiettivo. Quindi esiste un sottospazio vettoriale $U \subset V^\vee$ tale che $Z = \mathbb{P}(U)$. Sia $\{f_1, \ldots, f_c\}$ una base di U e poniamo $W := \ker f_1 \cap \ldots \cap \ker f_c$. Siccome $f_1, \ldots, f_c$ sono linearmente indipendenti l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}^c \\ v & \mapsto & (f_1(v), \ldots, f_c(v)) \end{array} \tag{9.4.1.6}$$

è suriettiva (se non lo fosse l'immagine sarebbe un sottospazio proprio e allora esisterebbero $\lambda_1, \ldots, \lambda_c \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 f_1(v) + \ldots + \lambda_c f_c(v) = 0$ per ogni $v \in V$, cioè una relazione di dipendenza lineare tra $f_1, \ldots, f_c$) e quindi $\dim W = (\dim V - c)$. D'altra parte per la **Proposizione 4.6.5** si ha che $\dim \mathrm{Ann}(W) = \dim V - (\dim V - c) = c$: siccome $U \subset \mathrm{Ann}\, W$ e $\dim U = c$ segue che $U = \mathrm{Ann}\, W$ e perciò $Z = \mathrm{Ann}(\mathbb{P}(W))$. □

Esempio 9.4.4. Sia V uno spazio vettoriale. La *stella* di iperpiani di centro $p \in \mathbb{P}(V)$ è l'iperpiano $\mathrm{Ann}(p)$: questi sono gli iperpiani di $\mathbb{P}(V^\vee)$. Un *fascio* di iperpiani di centro un sottospazio proiettivo $L \subset \mathbb{P}(V)$ di codimensione 2 è l'insieme degli iperpiani contenenti L: queste sono le rette di $\mathbb{P}(V^\vee)$.

Osservazione 9.4.5. Siano $L, M \subset \mathbb{P}(V)$ sottospazi proiettivi. Allora $\mathrm{Ann}(L) = \mathrm{Ann}(M)$ solo se $L = M$. Quindi la **Proposizione 9.4.3** e l'**Osservazione 9.4.2** danno una bijezione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & (\mathbb{P}(V)^\vee)^\vee \\ p & \mapsto & \mathrm{Ann}(p) \end{array} \tag{9.4.1.7}$$

Questa non è altro che la proiettivizzazione dell'ismorfismo naturale $V \xrightarrow{\sim} (V^\vee)^\vee$, vedi la **Proposizione 4.6.14**.

9.4.2 Teoremi in dualità

Ogni teorema ha un suo teorema duale, ottenuto scrivendo ipotesi e tesi del teorema per lo spazio duale. Per esempio il duale del Teorema di Pappo è il seguente.

Teorema 9.4.6 (duale del Teorema di Pappo)**.** *Sia* $\mathbf{P}$ *un piano proiettivo e* $L_1, \ldots, L_6 \subset \mathbf{P}$ *rette distinte tali che:*

1. L_1, L_3, L_5 *contengono il punto* p *e* L_2, L_4, L_6 *contengono il punto* q*, dove* $p \neq q$*,*

2. *nessuna delle rette* L_i *contiene sia* p *che* q*.*

Allora le rette

$$\langle L_1 \cap L_2, L_4 \cap L_5 \rangle, \quad \langle L_2 \cap L_3, L_5 \cap L_6 \rangle, \quad \langle L_3 \cap L_4, L_6 \cap L_1 \rangle \tag{9.4.2.1}$$

(notate che per le ipotesi $L_1 \cap L_2 \neq L_4 \cap L_5$ *etc.) hanno un punto in comune.*

Come abbiamo ottenuto il **Teorema 9.4.6** dal **Teorema 9.3.27**? Sia $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V)$ dove V è uno spazio vettoriale di dimensione 3. Il **Teorema 9.4.6** è ottenuto esplicitando l'enunciato del **Teorema 9.3.27** per lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^\vee)$. L'ipotesi del **Teorema 9.3.27** si traduce nell'ipotesi del **Teorema 9.4.6** perchè rette di un piano $\mathbf{P}$ sono allineate (quando le consideriamo come punti del duale $\mathbf{P}^\vee$) se solo se hanno un punto d'intersezione p, e, nel caso che non siano rette coincidenti, l'unica retta di $\mathbf{P}^\vee$ che le contiene è il fascio di centro p. Analogamente la tesi del **Teorema 9.3.27** si traduce nella tesi del **Teorema 9.4.6** perchè il sottospazio generato da rette distinte $L_1, L_2 \subset \mathbf{P}$ è il fascio di rette di centro $L_1 \cap L_2$, e perchè l'intersezione del fascio di centro p e il fascio di centro q è la retta $\langle p, q \rangle$ se $p \neq q$.

Esercizi del Capitolo 9

Esercizio 9.1. *Verificare che i punti*

$$[a_0, a_1, a_2], \; [b_0, b_1, b_2], \; [c_0, c_1, c_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$$

sono allineati se e solo se

$$0 = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}.$$

A partire da questo risultato ottenere un criterio necessario e sufficiente perchè punti $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ *siano allineati.*

Esercizio 9.2. *Siano* $A_1, A_2 \subset (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$ *le rette affini di equazioni cartesiane*

$$A_1 : \; 3x_1 + 2x_2 - 1 = 0, \qquad A_2 : \; 3x_1 + 2x_2 + 5 = 0. \tag{9.4.2.2}$$

(Come di consueto identifichiamo gli spazi affini $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$ *e* $\mathbb{R}^2$ *via* (9.2.1.4)*.)*

1. *Date equazioni cartesiane omogenee di* $\overline{A}_1$ *e* $\overline{A}_2$*.*

2. *Determinate il punto d'intersezione tra* $\overline{A}_1$ *e* $\overline{A}_2$*.*

Esercizio 9.3. *Sia* $\mathbf{P}$ *uno spazio proiettivo su* $\mathbb{K}$ *di dimensione* 3*. Siano* $L_1, L_2 \subset \mathbf{P}$ *due rette shembe, cioè disgiunte. Sia* $p \in (\mathbf{P} \setminus L_1 \setminus L_2)$*. Dimostrate che esiste una e una sola retta* R *contente* p *e incidente sia* L_1 *che* L_2 *(incidente* L_i *vuol dire che ha intersezione non vuota con* L_i*).*

Esercizio 9.4. *Sia* $\mathbf{P}$ *uno spazio proiettivo di dimensione* 4*. Siano* $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbf{P}$ *rette a due a due sghembe e non contenute in uno stesso iperpiano. Dimostrate che esiste un'unica retta incidente* L_1*,* L_2 *e* L_3*, cioè una retta che ha intersezione non vuota con* L_1*,* L_2 *e* L_3*.*

Esercizio 9.5. *Sia* $\mathbf{P}$ *uno spazio proiettivo di dimensione* 4. *Siano* $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \subset \mathbf{P}$ *piani tali che l'intersezione di due qualsiasi di essi sia un singolo punto e che la tripla intersezione* $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \Lambda_3$ *sia vuota. Dimostrate che esiste uno e un solo piano che interseca ciascuno dei piani* $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ *in una retta.*

Esercizio 9.6. *Dato un numero primo* p *sia* $\mathbb{F}_p$ *il campo (determinato a meno di isomorfismo) di cardinalità* p*, quindi* $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/(p)$. *Determinate la cardinalità di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_p}$.

Esercizio 9.7. *Sia* p *un numero primo. Determinate la cardinalità del gruppo finito* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p})$. *I gruppi* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p})$ *per* $p = 2, 3$ *sono isomorfi a gruppi ben noti: quali ?*

Esercizio 9.8. *Dimostrate che il gruppo* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ *è generato dalle immagini dei seguenti sottogruppi (abeliani) di* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$*:*

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \mathbb{K} \ni a \neq 1\right\}, \qquad \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{K}\right\}, \qquad \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \tag{9.4.2.3}$$

Esercizio 9.9. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo e* $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{K}$. *Per* $i = 0, \ldots, 3$ *sia* $P_i := [1, a_i, a_i^2]. \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. *Verificate che* $P_0, \ldots, P_3$ *sono in posizione generale se e solo se* $a_0, \ldots, a_3$ *sono distinti.*

Esercizio 9.10. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo di caratteristica diversa da* 2 *e da* 3. *Siano* $P_0, \ldots, P_3, Q \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ *i punti*

$$P_0 := [1,0,0], \qquad P_1 := [1,1,1], \qquad P_2 := [1,-1,1], \qquad P_3 := [1,2,4], \qquad Q := [4,2,1].$$

1. *Verificate che* $P_0, \ldots, P_3$ *sono in posizione generale (potete invocare l'***Esercizio 9.9***).*
2. *Determinate le coordinate di* Q *nel riferimento proiettivo* $\mathcal{R}(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

Esercizio 9.11. *Sia* $\mathbf{P}$ *una retta proiettiva e* $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbf{P}$ *tali che non esistono tre indici i cui punti corrispondenti sono uguali. Sia* $\alpha := \beta(P_1, \ldots, P_4)$. *Si verifichi che l'insieme dei valori di* $\beta(P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(4)})$ *al variare di* $\sigma \in \mathcal{S}_4$ *(il gruppo delle permutazioni di* $\{1,2,3,4\}$*) è uguale a*

$$\left\{\alpha, \quad \alpha^{-1}, \quad 1-\alpha, \quad \frac{1}{1-\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1}, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha}\right\}.$$

Esercizio 9.12. *Sia* $\mathbf{P}$ *una retta proiettiva e* $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbf{P}$ *con* $\{P_1, P_2\} \cap \{P_3, P_4\} = \emptyset$.

1. *Dimostrate che esiste* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{P})$ *che scambia* P_1, P_2 *e* P_3, P_4*, cioè tale che*

$$F(P_1) = P_2, \qquad F(P_2) = P_1, \qquad F(P_3) = P_4, \qquad F(P_4) = P_3.$$

2. *Dimostrate che se c'è al più una ripetizione tra i punti* $P_1, \ldots, P_4$ *allora una* F *che scambia* P_1, P_2 *e* P_3, P_4 *è unica ed è un'involuzione, cioè* $F \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{P}}$.

Esercizio 9.13. *Sia* $\mathbf{P}$ *una retta proiettiva e* $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbf{P}$ *tali che* $\beta(P_1, \ldots, P_4) = -1$. *Dimostrate che esiste* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{P})$ *che fissa* P_1 *e* P_2 *e scambia* P_3, P_4*, cioè tale che*

$$F(P_1) = P_1, \qquad F(P_2) = P_2, \qquad F(P_3) = P_4, \qquad F(P_4) = P_3.$$

Esercizio 9.14. *Sia* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$.

1. *Dimostrate che se* $\mathbb{K}$ *è algebricamente chiuso esiste un* punto fisso *di* F *cioè* $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *tale che* $F(P) = P$.
2. *Date un esempio di* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$ *che* non *ha punti fissi.*
3. *Sia* n *pari e* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$. *Dimostrate che esiste un* punto fisso *di* F.

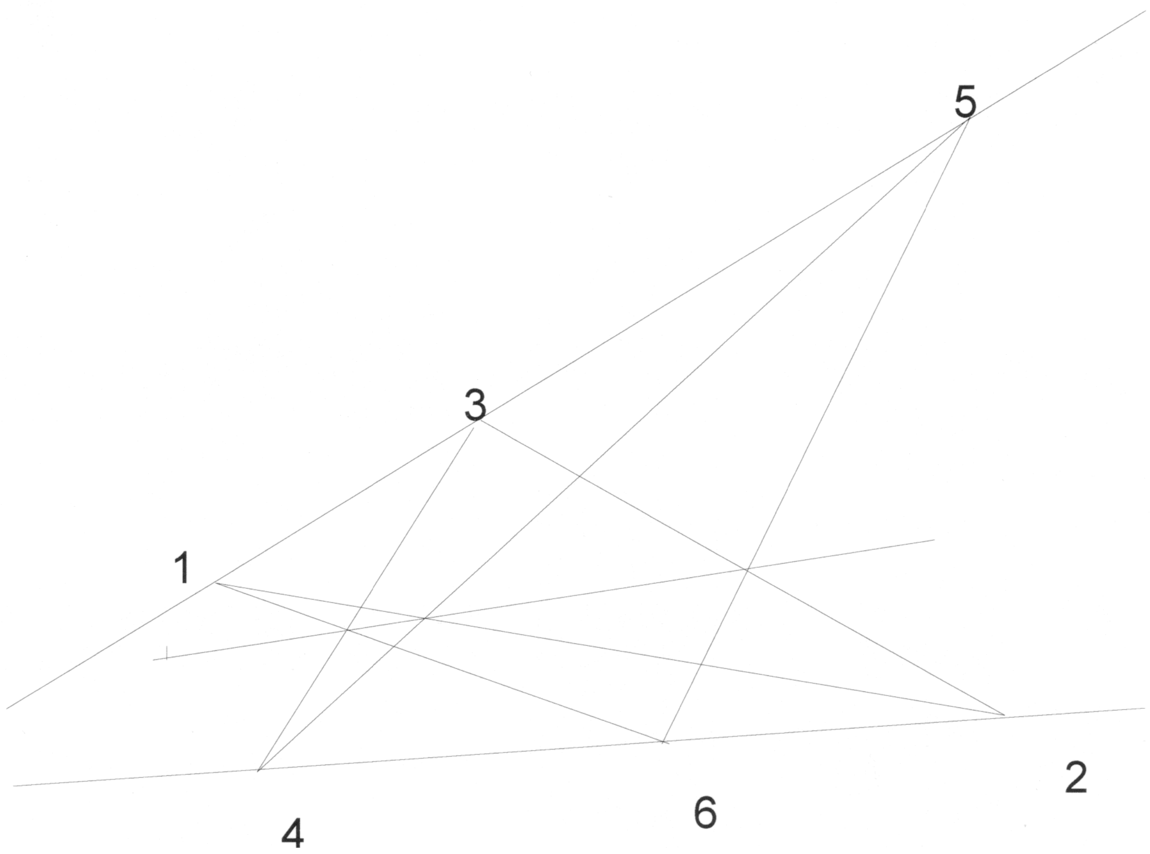

Figura 9.2: Il Teorema di Pappo

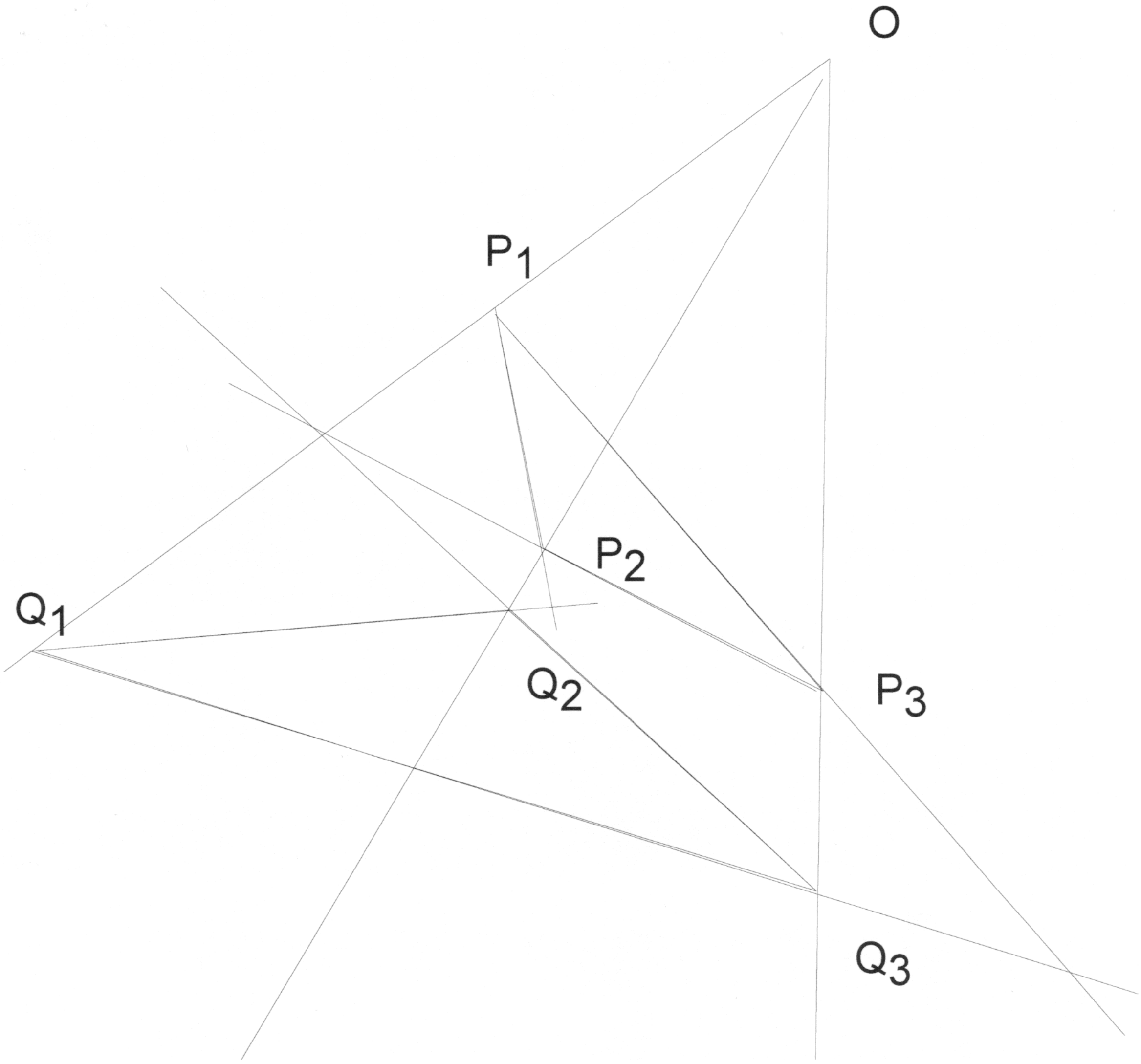

Figura 9.3: Il Teorema di Desargues