Capitolo 10

Ipersuperfici

Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$. Sia $X\colon \mathbb{S} \xrightarrow{\sim}$ un sistema di coordinate affini su $\mathbb{S}$ e $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Studieremo i sottoinsiemi di $\mathbb{S}$ definiti come segue:

$$V(f) := \{p \in \mathbb{S} \mid f(X(p)) = 0\}.$$

Per esempio $V(f)$ è un iperpiano se f ha grado 1, è una quadrica se il grado di f è 2. Per il momento diciamo informalmente che $V(f)$ è una *ipersuperficie affine* (per la definizione formale vedi **Definizione 10.1.9**). Se vogliamo capire com è fatta una ipersuperficie affine $V(f)$ conviene considerare $\mathbb{S}$ come il complemento dell'iperpiano all'infinito di uno spazio proiettivo $\mathbf{P}$ e $V(f)$ come l'intersezione di $\mathbb{S}$ con una ipersuperficie proiettiva, che si definisce informalmente come segue. Siano $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ coordinate omogenee su $\mathbf{P}$ e $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio *omogeneo* di grado d. Sia $p \in \mathbf{P}$: diciamo che $F(p) = 0$ se e solo se $F(X_0, \ldots, X_n) = 0$ dove $[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ sono coordinate omogenee di p. Questa è una definzione ben posta perchè $F(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \ldots, X_n)$ e quindi vale $F(X_0, \ldots, X_n) = 0$ per una scelat di coordinate omogenee se e solo se vale per ogni altra scelta. Fatte queste premesse ha senso definire

$$\mathbf{V}(F) := \{p \in \mathbf{P} \mid F(p) = 0\}.$$

Diciamo informalmente che $\mathbf{V}(F)$ è una *ipersuperficie proiettiva*, vedi **Definizione 10.1.12** per la definizione formale. Per esempio $\mathbf{V}(F)$ è un iperpiano se F ha grado 1. La relazione tra ipersuperfici proiettive e affini è data dalla seguente osservazione. Sia $\mathbb{S} = \mathbb{P}_{X_0} = (\mathbf{P} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0)$ il complemento dell'iperpiano all'infinito. Sappiamo che coordinate affini su $\mathbb{P}_{X_0}$ sono date da $x_i := X_i/X_0$ per $i = 1, \ldots, x_n$ e quindi $p \in \mathbf{P}_{X_0}$ appartiene a $\mathbf{V}(F)$ se e solo se $F(1, x_1(p), \ldots, x_n(p)) = 0$. Siccome $F(1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ questo dimostra che $\mathbf{V}(F) \cap \mathbb{P}_{X_0}$ è una ipersuperficie affine.

10.1 Preliminari

10.1.1 Fattorizzazione unica di polinomi

Se $I = (i_1, \ldots, i_n)$ è un multi-indice il *monomio* corrispondente a I è il polinomio $x^I := x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, il suo grado è $|I| = \sum_{k=1}^n i_k$. Per $d \in \mathbb{N}$ sia

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d := \left\{ \sum_{|I|=d} a_I x^I \mid a_I \in \mathbb{K} \right\}. \tag{10.1.1}$$

Notate che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d$ è un $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (ma *non* un sottoanello se $d > 0$). Abbiamo la decomposizione in somma diretta

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d. \tag{10.1.2}$$

Il *grado* di $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è definito come segue. Supponiamo che $f \neq 0$. Possiamo scrivere $f = f_d + f_{d-1} + \ldots + f_0$ dove $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i$ per $i = 0, \ldots, d$ e $f_d \neq 0$: il grado di f è d e si denota $\deg f$. Il grado del polinomio 0 si pone uguale a $(-\infty)$. Si verifica facilmente che

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}, \qquad \deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g. \tag{10.1.3}$$

Dall'uguaglianza $\deg(f \cdot g) = (\deg f + \deg g)$ segue che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è un dominio d'integrità (cioè non ha divisori di 0) e che le unità di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (cioè gli elementi invertibili) hanno grado 0 e quindi il gruppo delle unità è $\mathbb{K}^*$. Se siamo interessati a $V(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è utile sapere quali siano i fattori di f perchè a una decomposizione $f = g \cdot h$ corrisponde la decomposizione $V(f) = V(g) \cup V(h)$. Ricordiamo che se R è un dominio d'integrità un $a \in R$ *non nullo* è *irriducibile* se per ogni decomposizione $a = b \cdot c$ si ha che b o c è una unità. D'altra parte $a \in R$ non nullo è *primo* se il quoziente $R/(a)$ è un dominio d'integrità, cioè se $a|(b \cdot c)$ (cioè a divide $(b \cdot c)$) implica che $a|b$ o $a|c$. (Per convenzione l'anello in cui $1 = 0$ *non* è un dominio d'integrità e quindi una unità *non* è un primo.) Segue facilmente dalle definizioni che se a è primo allora è irriducibile, ma in generale non è vero il viceversa, per esempio nell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x, y, z]/(xy - z^2)$ l'elemento $\overline{x}$ (cioè la classe di equivalenza di x) è irriducibile ma non primo ($\overline{x}|\overline{z}^2$ ma $\overline{x}$ non divide $\overline{z}$). Due elementi non nulli $a, b \in R$ sono *associati* se $a = u \cdot b$ dove u è una unità; la relazione appena definita è di equivalenza. Un dominio d'integrità è a *fattorizzazione unica* se

1. Ogni elemento irriducibile di R è una unità o è primo.
2. Ogni elemento non nullo $a \in R$ ammette una decomposizione

$$a = u \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \tag{10.1.4}$$

   dove u è una unità e ciascun p_i è un primo. (Il valore $n = 0$ è ammesso, si ha nel caso in cui a è una unità.)

Ricordiamo che sotto queste ipotesi la fattorizzazione (10.1.4) è unica a meno dell'ordine e della relazione dell'essere associati, cioè ogni altra decomposizione di a in fattori primi si può scrivere dopo un riordinamento come $a = u' \cdot p'_1 \cdot \ldots \cdot p'_n$ dove u' è una unità e p'_i è (un primo) associato a p_i. Una classe importante di anelli (s'intende privi di divisori dello 0) a fattorizzazione unica sono quelli a ideali principali, per esempio $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{K}[x]$ dove $\mathbb{K}$ è un campo (anche di cardinalità finita!). Se $n > 1$ l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *non* è a ideali principali (per esempio l'ideale dei polinomi che si annullano in $(0, \ldots, 0)$ non è principale) ma è a fattorizzazione unica. La dimostrazione verrà fatta per induzione sul numero di trascendenti: abbiamo un isomorfismo tra $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ dei polinomi nella trascendente x_n a coefficienti in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e quindi sarà sufficiente dimostrare che se R è un dominio d'integrità a fattorizzazione unica allora anche $R[x]$ è a fattorizzazione unica. Sia $0 \neq f \in R[x]$ dove R è un dominio d'integrità a fattorizzazione unica: possiamo scrivere

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d, \quad a_d \neq 0, \quad d \geq 0.$$

(Quindi $d = \deg f$.) Il *contenuto* di f è

$$c(f) := \mathrm{mcd}\,\{a_0, a_1, \ldots, a_d\}\,. \tag{10.1.5}$$

Ricordiamo che il massimo comun divisore di elementi di R non tutti nulli è definito a meno di moltiplicazione per una unità. Una uguaglianza che coinvolge il contenuto di polinomi in $R[x]$ si intende che vale a meno di moltiplicazione per unità. Per esempio $c(f) = 1$ significa che il contenuto of f è una unità.

Lemma 10.1.1 (Lemma di Gauss)**.** *Sia R un dominio a fattorizzazione unica e $f, g \in R[x]$ non nulli. Allora $c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g)$.*

Dimostrazione. Scriviamo $f = c(f)f_0$ e $g = c(g)g_0$: quindi $c(f_0) = 1$ e $c(g_0) = 1$. Abbiamo che $f \cdot g = c(f) \cdot c(g) f_0 \cdot g_0$ e $c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g) c(f_0 \cdot g_0)$. Quindi è sufficiente dimostrare che $c(f_0 \cdot g_0) = 1$.

Sia $p \in R$ un primo e siano $\overline{f_0}, \overline{g_0}, \overline{f_0 \cdot g_0} \in (R/(p))[x]$ i polinomi ottenuti riducendo modulo p i coefficienti di f_0, g_0 e $f_0 \cdot g_0$ rispettivamente. Siccome $c(f_0) = 1$ e $c(g_0) = 1$ sia $\overline{f_0}$ che $\overline{g_0}$ sono non nulli. Siccome $R/(p)$ è un campo l'anello $R/(p)[x]$ è un dominio d'integrità e quindi

$$0 \neq \overline{f_0} \cdot \overline{g_0} = \overline{f_0 \cdot g_0}.$$

Quindi p non divide tutti i coefficienti di $f_0 \cdot g_0$. Siccome p è un primo arbitrario ne segue che nessun primo divide $c(f_0 \cdot g_0)$ e perciò $c(f_0 \cdot g_0) = 1$. □

Lemma 10.1.2. *Sia R un dominio a fattorizzazione unica e F il suo campo delle frazioni.*

1. *Siano $f, g \in R[x]$ e assumiamo che $f \neq 0$ e $c(f) = 1$. Allora $f|g$ in $R[x]$ se e solo se $f|g$ in $F[x]$.*
2. *Se $0 \neq f \in R[x]$ è riducibile in $F[x]$ allora è riducibile anche in $R[x]$.*
3. *Un $f \in R[x]$ non nullo è primo in $R[x]$ se e solo se*
   (a) *$\deg f = 0$ (cioè $f \in (R \setminus \{0\})$ e f è un primo di R, oppure*
   (b) i. *$\deg f > 0$,*
       ii. *$c(f) = 1$ e*
       iii. *f è primo in $F[x]$.*

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Se f divide g in $R[x]$ allora divide g in $F[x]$ perchè $R \subset F$. Ora supponiamo che f divide g in $F[x]$. Se $g = 0$ allora f divide g in $R[x]$, quindi possiamo supporre che $g \neq 0$. Siccome $f|g$ in $F[x]$ esistono $0 \neq h \in R[x]$ and $0 \neq a \in R$ tali che $g = f \cdot (h/a)$ cioè

$$ag = f \cdot h. \tag{10.1.6}$$

Applicando il **Lemma 10.1.1** a (10.1.6) otteniamo che $ac(g) = c(h)$. Quindi $a|c(h)$ e perciò $h/a \in R[x]$ e siccome $g = f \cdot (h/a)$ abbiamo dimostrato che f divide g in $R[x]$. Ora dimostriamo (2). Per ipotesi esistono $f_1, f_2 \in F[x]$ di grado strettamente positivo tali che $f = f_1 \cdot f_2$. Possiamo scrivere $f_1 = h_1/a_1$ con $h_1 \in R[x]$, $a_1 \in R^*$ e $h_1 = c(h_1)\overline{h}_1$ con $\overline{h}_1 \in R[x]$. Quindi $\overline{h}_1|f$ in $F[x]$ e siccome (per il **Lemma 10.1.1**) $c(\overline{h}_1) = 1$ il punto (1) dà che $\overline{h}_1|f$ in $R[x]$. Ma $0 < \deg(\overline{h}_1) < \deg(f)$ e perciò f è riducibile in $R[x]$. Infine dimostriamo (3). Cominciamo supponendo che valga (a) o (b) e dimostrando che f è primo. Siano $g_1, g_2 \in R[x]$ tali che $f|(g_1g_2)$: dobbiamo dimostrare che $f|g_1$ o $f|g_2$. Se $\deg f = 0$ e quindi f è un primo di R, allora $f|c(g_1 \cdot g_2)$ e quindi $f|c(g_1) \cdot c(g_2)$ per il **Lemma 10.1.2**. Siccome R è a fattorizzazione unica segue che $f|c(g_1)$ o $f|c(g_2)$, cioè $f|g_1$ o $f|g_1$. Ora supponiamo che $\deg f > 0$ cioè vale (b). Siccome f è primo in $F[x]$ abbiamo che f divide (in $F[x]$) almeno uno tra g_1 e g_2, diciamo g_1: siccome $c(f) = 1$ segue dal punto (1) che f divide g_1 in $R[x]$. Rimane da dimostrare che se $f \in F[x]$ è primo allora vale (a) o (b). Se $\deg f = 0$, siccome f è primo in $R[x]$ è irriducibile in $R[x]$, cioè in R, e siccome R è a fattorizzazione unica segue dal **Lemma 10.1.1** che f è primo. Ora supponiamo che $\deg f > 0$ e dimostriamo che vale (b). Abbiamo $f = c(f) \cdot f_0$ dove $f_0 \in R[x]$. Ma f è irriducibile perchè primo e quindi $c(f)$ o f_0 è una unità. Siccome $\deg f_0 > 0$ il polinomio f_0 non è una unità e quindi $c(f) = 1$. Rimane da dimostrare che f è primo in $F[x]$, e siccome $F[x]$ è a fattorizzazione unica è sufficiente dimostrare che f è irriducibile in $F[x]$: se fosse riducibile in $F[x]$ allora sarebbe riducibile in $R[x]$ per (2) e questo contraddice l'ipotesi che f sia primo. □

Teorema 10.1.3. *Se R è un dominio a fattorizzazione unica allora $R[x]$ è a fattorizzazione unica.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ogni irriducibile di $R[x]$ che non è una unità è primo e che ogni elemento non nullo di $R[x]$ ha una decomposizione (10.1.4). Supponiamo che $0 \neq f \in R[x]$ sia irriducibile e non una unità. Se $\deg f = 0$ allora f è irriducibile in R e quindi primo in R perchè R è a fattorizzazione unica; segue dal **Lemma 10.1.2** che f è primo in $R[x]$. Se $\deg f > 0$ allora $c(f) = 1$ perchè f è irriducibile. Sia F il campo delle frazioni di R; per il punto (2) del **Lemma 10.1.2** f è irriducibile in $F[x]$ e quindi primo in $F[x]$, e concludiamo che f è primo in $R[x]$ per il punto (3) del **Lemma 10.1.2**. Ora dimostriamo che ogni elemento non nullo di $R[x]$ ha una decomposizione (10.1.4). Se $\deg f = 0$ la decomposizione è quella di f come elemento di R. Se $\deg f > 0$ scriviamo $f = c(f)f_0$, decomponiamo (in R) $c(f)$ in fattori primi e scriviamo f_0 come prodotto di elementi di $R[x]$ che non possono essere decomposti come prodotto di polinomi di grado strettamente minore: segue dal **Lemma 10.1.1** e dal **Lemma 10.1.2** che ciascuno dei fattori così ottenuti di f è primo. □

Corollario 10.1.4. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo arbitrario (qui non supponiamo che abbia cardinalià infinita). L'anello* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *è a fattorizzazione unica.*

Dimostrazione. Per induzione su n. Se $n = 1$ l'anello è $\mathbb{K}[x_1]$, che è a fattorizzazione unica perchè è a ideali principali. Il passo induttivo segue dal **Teorema 10.1.3** perchè c'è un isomorfismo tra $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ dei polinomi nella trascendente x_n a coefficienti in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. □

10.1.2 Ipersuperfici affini e proiettive: definizioni

Da ora in poi assumeremo tacitamente che il campo $\mathbb{K}$ è infinito e dichiareremo esplicitamente quando non verrà fatta questa ipotesi. Ricordiamo che con questa ipotesi le funzioni polinomiali $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definite da polinomi $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sono uguali solo se sono uguali i polinomi e perciò possiamo identificare polinomi in n trascendenti e funzioni polinomiali $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Cominciamo osservando che ha senso parlare di funzioni polinomiali su uno spazio affine.

Proposizione 10.1.5. *Siano* $\phi \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ *(il vettore colonna con entrata* y_i *sulla riga i-esima), e quindi*

$$\psi := \varphi(A \cdot Y + B) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n].$$

1. *Se* $\phi = \phi_d + \phi_{d-1} + \ldots + \phi_0$ *dove* $\phi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i$, *allora*

$$\psi = \phi_d(A \cdot Y) + \zeta_{d-1} + \ldots + \zeta_0, \qquad \zeta_i \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]_i.$$

2. *Si ha che* $\deg \psi = \deg \phi$
3. *Se* ϕ *è omogeneo lo è anche* ψ.

Dimostrazione. Facile esercizio. □

Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ e $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ una funzione. Siccome coordinate affini X e Y su $\mathbb{S}$ sono legate dalla relazione $X(p) = (A \cdot Y(p) + B)$ per ogni $p \in \mathbb{T}$ la **Proposizione 10.1.5** mostra che se f è una funzione polinomiale nelle coordinate X allora è polinomiale anche nelle coordinate Y, e perciò ha senso la seguente definizione.

Definizione 10.1.6. Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ di dimensione n. Una funzione $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ è *polinomiale* se, scelto un sistema di coordinate affini $X\colon \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si ha che $f \circ X^{-1}$ è un polinomio. Il *grado* di f è il grado di $f \circ X^{-1}$, e si indica $\deg f$. Se $\mathbb{S} = V$ è anche uno spazio vettoriale, e quindi ha senso la moltiplicazione per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, diciamo che f è *omogenea* se esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che $f(\lambda v) = \lambda^d f(v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in V$.

Osservazione 10.1.7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $X\colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$ un isomorfismo di spazi vettoriali. Una polinomio $f\colon V \to \mathbb{K}$ è omogeneo se esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che $f \circ X^{-1} \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_d$.

Osservazione 10.1.8. Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ di dimensione n e $f, g\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ funzioni polinomiali. Allora $(f - g)$ e $f \cdot g$ sono funzioni polinomiali, e quindi l'insieme delle funzioni polinomiali su $\mathbb{S}$ è un sottoanello dell'anello delle funzioni $\mathbb{S} \to \mathbb{K}$, che denotiamo $\mathbb{K}[\mathbb{S}]$. Sia $X\colon \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate affini su $\mathbb{S}$: allora

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathbb{S}] \\ \phi & \mapsto & \phi \circ X \end{array}$$

è un isomorfismo di anelli.

Studieremo i sottoinsiemi di uno spazio affine $\mathbb{S}$ che sono zeri di funzioni polinomiali: data una funzione polinomiale $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ poniamo

$$V(f) := \{p \in \mathbb{S} \mid f(p) = 0\} \tag{10.1.7}$$

e diciamo che $V(f)$ è l'*insieme degli zeri di* f. Polinomi molto diversi possono avere gli stessi zeri, per esempio se $f_n := (x^{2n}+1) \in \mathbb{R}[x]$ allora $V(f_n) = \emptyset$ per ogni n, oppure se $f := x(x-1)^2$ e $g = x^2(x-1)$ si ha che $V(f) = V(g)$. Nel primo esempio il "problema" nasce dalla circostanza che i polinomi dati hanno soluzioni complesse non reali (se $n > 0$), nel secondo dalle diverse molteplicità degli zeri. È conveniente far andare d'accordo il più possibile l'algebra con la geometria, e quindi dare la seguente definizione.

Definizione 10.1.9. Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Una *ipersuperficie* in $\mathbb{S}$ è una funzione $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ polinomiale di grado strettamente positivo, presa a meno di moltiplicazione per un elemento non nullo di $\mathbb{K}$, e si denota $[f]$. Il *supporto* di $[f]$ è l'insieme degli zeri $V(f)$. Il *grado* di $[f]$ è il grado di f.

Esempio 10.1.10. Sia $L \subset \mathbb{S}$ un iperpiano affine. Esiste un'equazione cartesiana $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ di L ($\deg f = 1$) e f è determinata a meno di moltiplicazione per un elemento non nullo di $\mathbb{K}$. Viceversa se $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ è polinomiale di grado 1 allora l'insieme degli zeri di f è una ipersuperficie affine e $V(f) = V(g)$ per $g\colon \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ polinomiale di grado 1 solo se $[f] = [g]$. Quindi possiamo identificare l'insieme delle ipersuperfici di grado 1 e l'insieme degli iperpiani in $\mathbb{S}$.

Esempio 10.1.11. Una ipersuperficie di grado 2 in $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ è una classe di proporzionalità determinata da un polinomio $f := (ax^2 + bx + c)$ dove $a \neq 0$. Sia g un altro polinomio di grado 2. Se f ha radici reali allora $[f] = [g]$ solo e $V(f) = V(g)$, ma se f non ha radici reali allora $V(f) = V(g)$ per (molti) polinomi non proporzionali a f.

Ora siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $F\colon V \to \mathbb{K}$ una funzione polinomiale omogenea. Sia $[v] \in \mathbb{P}(V)$: siccome $F(\lambda v) = \lambda^d F(v)$, dove d è il grado di F, abbiamo che $F(v) = 0$ se e solo se $F(\lambda v) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Quindi ha senso porre

$$\mathbf{V}(F) := \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid F(v) = 0\}. \tag{10.1.8}$$

Diciamo che $\mathbf{V}(F)$ è l'insieme degli zeri di F in $\mathbb{P}(V)$ (a non confondere con $V(F) \subset V$). Per esempio se F è omogenea di grado 1, cioè una funzione lineare, allora $\mathbf{V}(F) = \mathbb{P}(\ker F)$. Per gli stessi motivi che inducono a definire una ipersuperficie affine in $\mathbb{S}$ come una classe di proporzionalità di funzione polinomiale su $\mathbb{S}$

Definizione 10.1.12. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una *ipersuperficie* in $\mathbb{P}(V)$ è una funzione polinomiale omogenea $F\colon V \to \mathbb{K}$ di grado strettamente positivo, presa a meno di moltiplicazione per un elemento non nullo di $\mathbb{K}$, e si denota $[F]$. Il *supporto* di $[F]$ è l'insieme degli zeri $\mathbf{V}(F)$. Il *grado* di $[F]$ è il grado di F.

Osservazione 10.1.13. L'insieme delle funzioni polinomiali omogenee $F\colon V \to \mathbb{K}$ di grado d è un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni polinomiali su V e si denota $\mathrm{Sym}^d V^\vee$. La scelta di una base $\{X_0, \ldots, X_n\}$ di $V^\vee$ identifica $\mathrm{Sym}^d V^\vee$ con $\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_d$. L'insieme delle ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}(V)$ è naturalmente identificato con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V^\vee)$.

Esempio 10.1.14. Associando a una $F \in V^\vee$ non nulla l'insieme degli zeri $\mathbf{V}(F) = \mathbb{P}(\ker F)$ si identifica lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^\vee)$ delle ipersuperfici proiettive di grado 1 in $\mathbb{P}(V)$ con lo spazio duale $\mathbb{P}(V)^\vee$.

10.1.3 Relazioni tra ipersuperfici affini e proiettive

Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di codimensione 1, quindi $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ è in modo naturale uno spazio affine su $\mathbb{K}$ della stessa dimensione di $\mathbb{P}(V)$. Mostreremo che una ipersuperficie (proiettiva) $[F]$ di grado d in $\mathbb{P}(V)$ determina una ipersuperficie (affine) in $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$. Sia $L\colon V \to \mathbb{K}$ un'applicazione lineare tale che $\ker L = W$, cioè un'equazione cartesiana di W - ricordiamo che denotiamo $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ anche $\mathbb{P}(V)_L$. Siano $v \in (V \setminus W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}^*$: siccome F è omogenea di grado d abbiamo

$$\frac{F(\lambda v)}{L(\lambda v)^d} = \frac{\lambda^d F(v)}{\lambda^d L(v)^d} = \frac{F(v)}{L(v)^d}.$$

Quindi la restrizione di F/L^d a $(V \setminus W)$ definisce un'applicazione $F_L \colon \mathbb{P}(V)_L \to \mathbb{K}$.

Lemma 10.1.15. *Mantenendo le notazioni appena introdotte, l'applicazione F_L è polinomiale di grado al più il grado di F. Si ha $\deg F_L < \deg F$ se e solo se $\mathbf{V}(L) \subset \mathbf{V}(F)$.*

Dimostrazione. Scegliamo coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_n$ su $\mathbb{P}(V)$ tali che $X_0 = L$. Quindi $x_i := X_i/X_0$ per $i = 1, \ldots, n$ sono coordinate affini su $\mathbb{P}(V)_L$. Nelle coordinate scelte abbiamo

$$F = G_d + G_{d-1}X_0 + \ldots + G_0 X_0^d, \qquad G_i \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]_i, \quad 0 \le i \le d.$$

Poniamo $g_i := G_i(x_1, \ldots, x_n)$. Allora (nelle coordinate scelte)

$$F_L = g_d + g_{d-1} + \ldots + g_0, \qquad g_i \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]_i, \quad 0 \le i \le d.$$

Segue che F_L è polinomiale di grado al più il grado di F. Inoltre vediamo che $\deg F_L < \deg F$ se e solo se $g_d = 0$, ovvero $G_d = 0$, e questo equivale a $\mathbf{V}(X_0) \subset \mathbf{V}(F)$. □

Se $\deg F_L$ allora F_L determina una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)_L$, che non dipende nè dal rappresentante F nè dalla scelta di L. Poniamo

$$[F]|_{(\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(W))} := [F_L] \tag{10.1.9}$$

e diciamo che $[F_L]$ è la *restrizione di* $[F]$ a $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$. Notiamo che

$$\mathbf{V}(F) \cap (\mathbb{P}(V)_L) = V(F_L). \tag{10.1.10}$$

Esiste un inverso parziale di questa procedura. Sia $\pi \colon (V \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbb{P}(V)$ l'applicazione quoziente. Data una $f \colon \mathbb{P}(V)_L \to \mathbb{K}$ polinomiale di grado d possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (V \setminus \ker L) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & L(v)^d f(\pi(v)) \end{array}$$

Scegliendo un sistema di coordinate omogenee di $\mathbb{P}(V)$ come nella dimostrazione del **Lemma 10.1.15** si vede che φ è la restrizione di un (unico) polinomio omogeneo $F \colon V \to \mathbb{K}$ di grado d, e che $F_L = f$. Diciamo che $[F]$ è la *chiusura* di $[f]$.

10.2 Ipersuperfici affini

10.2.1 Componenti irriducibili

In questa sottosezione supporremo che il campo $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso (per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Con questa ipotesi associeremo a una ipersuperficie in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un oggetto geometrico. Generalizzeremo la decomposizione di un polinomio di grado strettamente positivo $f \in \mathbb{K}[x]$ in prodotto di fattori lineari:

$$f = c(x - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{m_r}, \qquad c \in \mathbb{K}^*, \quad a_i \ne a_j \text{ se } 1 \le i < j \le r, \quad m_i > 0 \text{ se } 1 \le i \le r.$$

È chiaro che l'ipersuperficie $[f]$ è determinata dall'insieme dei suoi zeri *contati con le loro molteplicità* che possiamo denotare $(m_1 a_1 + \ldots m_r a_r)$. Cominceremo definendo l'analogo in dimensione arbitraria dell'espressione $(m_1 a_1 + \ldots m_r a_r)$. Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$, di dimensione n: per l'**Osservazione 10.1.8** l'anello $\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ delle funzioni polinomiali su $\mathbb{S}$ è isomorfo all'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e perciò è a fattorizzazione unica.

Definizione 10.2.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Un *divisore primo* di $\mathbb{S}$ è l'insieme degli zeri $V(f)$ di un polinomio *primo* $f\colon \mathbb{S}\to\mathbb{K}$. Il *gruppo dei divisori* di $\mathbb{S}$ è il gruppo abeliano libero generato dai divisori primi di $\mathbb{S}$, e si denota $\mathrm{Div}(\mathbb{S})$.

Quindi un elemento di $\mathrm{Div}(\mathbb{S})$ è una somma *formale* $m_1V(f_1)+\ldots+m_rV(f_r)$ dove ciascun f_i è un polinomio primo su $\mathbb{S}$ e gli insiemi $V(f_1),\ldots,V(f_r)$ sono distinti (includiamo il caso in cui si somma sull'insieme vuoto: il divisore corrispondente si denota 0), e la somma è definita formalmente (l'elemento nullo è il divisore 0). Gli elementi di $\mathrm{Div}(\mathbb{S})$ sono i *divisori di* $\mathbb{S}$.

Osservazione 10.2.2. Siano $f,g\in\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ polinomi primi. Se $[f]=[g]$ allora $V(f)=V(g)$. Non è affatto ovvio che valga il viceversa, cioè che se $V(f)=V(g)$ allora $[f]=[g]$. Questa sottosezione è principalmente dedicata alla dimostrazione che vale questo risultato sotto l'ipotesi che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso, vedi **Proposizione 10.2.8**.

Definizione 10.2.3. Siano $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Se $0\neq f\in\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ e $f=c\cdot f_1\cdot\ldots\cdot f_s$ è una sua decomposizione in prodotto di una unità $c\in\mathbb{K}^*$ e primi $f_1,\ldots,f_s$, il *divisore di* f, denotato $\mathrm{div}(f)$ è il divisore di $\mathbb{S}$ dato da

$$\mathrm{div}(f):=V(f_1)+\ldots+V(f_s). \tag{10.2.1}$$

(L'unicità della decomposizione in fattori primi assicura che la definizione è ben posta.) Se $[f]$ é una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ il *divisore di* $[f]$, denotato $\mathrm{div}([f])$ è dato da $\mathrm{div}(f)$ (la defінzione è ben posta perchè se $\lambda\in\mathbb{K}^*$ allora $\mathrm{div}(f)=\mathrm{div}(\lambda f)$).

Un divisore $(m_1V(f_1)+\ldots+m_rV(f_r))\in\mathrm{Div}(\mathbb{S})$ è *effettivo* se $m_i>0$ per $i=1,\ldots,r$ (il divisore 0 è effettivo). Notate che il divisore associato a una ipersuperficie è effettivo. Dimostreremo che ipersuperfici $[f]$ e $[g]$ in $\mathbb{S}$ sono uguali solo se i divisori associati $\mathrm{div}(f)$ e $\mathrm{div}(g)$ sono uguali. Quello che va dimostrato è che se $f,g\in\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ sono primi allora $V(f)=V(g)$ solo se f e g sono associati. Cominciamo con un risultato semplice ma utile.

Proposizione 10.2.4. *Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine n-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$ di cardinalità infinita (ma non supponiamo che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso) e $f\in\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ di grado $d\geq 0$. Esiste un sistema di coordinate $X\colon\mathbb{S}\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tale che*

$$f\circ X^{-1}=u_0x_n^d+g_1x_n^{d-1}+\ldots+g_d,\qquad u_0\in\mathbb{K}^*,\quad g_i\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]. \tag{10.2.2}$$

Dimostrazione. Sia $Y\colon\mathbb{S}\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate affini su $\mathbb{S}$ e scriviamo

$$f\circ Y^{-1}=f_d+f_{d-1}+\ldots+f_0,\qquad f_i\in\mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n]_i. \tag{10.2.3}$$

Il polinomio f_d non è nullo, siccome $\mathbb{K}$ è infinito esiste $\mathbf{0}\neq(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)\in\mathbb{K}^n$ tale che $f(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)\neq 0$. Sia $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $A\cdot(0,0,\ldots,0,1)^t=(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)^t$ e sia $X\colon\mathbb{S}\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ il sistema di coordinate affini su $\mathbb{S}$ per cui la formula del cambiamento di coordinate è $Y=A\cdot X$. Sostituendo $A\cdot X$ a Y nella (10.2.3) vediamo che

$$f\circ X^{-1}=f_d(A\cdot X)+h,\qquad \deg h<d. \tag{10.2.4}$$

Sviluppiamo il polinomio $f_d(A\cdot X)\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]_d$ come polinomio nella x_n a coefficienti polinomi in $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]$:

$$f_d(A\cdot X)=u_0x_n^d+u_1x_n^{d-1}+\ldots+u_d,\qquad u_i\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]_i.$$

Siccome $f_d(A\cdot(0,0,\ldots,0,1)^t)=f_d((\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)^t)\neq 0$ vediamo che $u_0\in\mathbb{K}^*$ e la proposizione segue dalla (10.2.4). $\square$

Corollario 10.2.5. *Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine n-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$ di cardinalità infinita e algebricamente chiuso. Siano $[f]$ una ipersuperficice di $\mathbb{S}$ e X un sistema di coordinate su $\mathbb{S}$ tale che valga* (10.2.2)*. Allora la proiezione*

$$\begin{array}{ccc} V(f) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{K}} \\ p & \mapsto & (x_1(p),\ldots,x_{n-1}(p)) \end{array}$$

è suriettiva.

Dimostrazione. Sia $(a_1,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{K}}$: allora $(a_1,\ldots,a_{n-1},x_n)\in\pi^{-1}(a_1,\ldots,a_{n-1})$ se e solo se

$$u_0x_n^d+g_1(a_1,\ldots,a_{n-1})x_n^{d-1}+\ldots+g_d(a_1,\ldots,a_{n-1})=0. \tag{10.2.5}$$

Siccome $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso l'equazione polinomiale (10.2.5) (nella x_n) ha almeno una soluzione e quindi $\pi^{-1}(a_1,\ldots,a_{n-1})$ non è vuoto. □

Ricordiamo che se $\mathbb{S}$ è uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ allora l'anello $\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ è isomorfo a $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ dove n è la dimensione di $\mathbb{S}$, vedi l'**Osservazione 10.1.8**, e quindi $\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ è un dominio a fattorizzazione unica.

Proposizione 10.2.6. *Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $f\in\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ primo. Un polinomio $g\in\mathbb{K}[T]$ si annulla su $V(f)$ se e solo se è un multiplo di f.*

Dimostrazione. Se g è un multiplo di f è chiaro che si annula su $V(f)$. Per dimostrare il viceversa supponiamo che g si annulli su $V(f)$ ma che non sia un multiplo di f: arriveremo a una contraddizione. Siano n la dimensione di $\mathbb{S}$ e X un sistema di coordinate su $\mathbb{S}$ tale che valga (10.2.2). Siano $\phi:=f\circ X^{-1}$ e $\psi:=g\circ X^{-1}$. Siccome f è primo lo è anche ϕ, e siccome g non è un multiplo di f anche ψ non è un multiplo di ϕ. Sia $\mathbb{K}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ il campo dei quozienti di $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]$, cioè il campo delle funzioni razionali nelle trascendenti $x_1,\ldots,x_{n-1}$. Consideriamo ϕ e ψ come elementi di $\mathbb{K}(x_1,\ldots,x_{n-1})[x_n]$. Per il **Lemma 10.1.2** ϕ è primo in $\mathbb{K}(x_1,\ldots,x_{n-1})[x_n]$ e non divide ψ nemmeno in $\mathbb{K}(x_1,\ldots,x_{n-1})[x_n]$, e siccome l'anello $\mathbb{K}(x_1,\ldots,x_{n-1})[x_n]$ è a ideali principali esistono $\alpha,\beta\in\mathbb{K}(x_1,\ldots,x_{n-1})[x_n]$ tali che

$$\alpha\cdot\phi+\beta\cdot\psi=1.$$

Moltiplicando ambo i membri per un denominatore comune di α e β (cioè $0\neq\gamma\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]$ tale che $\gamma\cdot\alpha\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]$ e $\gamma\cdot\beta\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_{n-1}]$) otteniamo che

$$\gamma\cdot\alpha\cdot\phi+\gamma\cdot\beta\cdot\psi=\gamma.$$

Segue che se $0=\phi(a_1,\ldots,a_n)=\psi(a_1,\ldots,a_n)$ allora $\gamma(a_1,\ldots,a_{n-1})=0$. Siccome $\gamma\neq 0$ esiste $(a_1,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{K}^{n-1}$ tale che $\gamma(a_1,\ldots,a_{n-1})=0$ e questo contraddice il **Corollario 10.2.5**. □

Corollario 10.2.7. *Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $f\in\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ primo. Siano $\phi,\psi\in\mathbb{K}[\mathbb{S}]$ primi e tali che $V(\phi)=V(\psi)$: allora ϕ e ψ sono associati.*

Il seguente risultato dà l'annunciata interpretazione geometrica di ipersuperficie affine su un campo algebricamente chiuso.

Proposizione 10.2.8. *Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Se $[f]$ e $[g]$ sono ipersuperfici di $\mathbb{S}$ allora $[f]=[g]$ se e solo se i divisori associati* $\mathrm{div}(f)$ *e* $\mathrm{div}(g)$ *sono uguali.*

Dimostrazione. Se $[f]=[g]$ i polinomi f e g sono associati, quindi i loro fattori primi sono gli stessi e hanno le stesse molteplicità: ne segue che $\mathrm{div}(f)=\mathrm{div}(g)$. Ora dimostriamo il viceversa: supponiamo che $\mathrm{div}(f)=\mathrm{div}(g)$ e mostriamo che $[f]=[g]$. Siano

$$f=u\cdot\prod_{i=1}^{r}f_i^{m_i},\qquad g=v\cdot\prod_{j=1}^{s}g_j^{n_j}$$

le decomposizioni in prodotto di unità (u e v) e fattori primi, con f_{i_1} *non* associato a f_{i_2} se $i_1\neq i_2$ e similmente per g. Per ipotesi

$$\sum_{i=1}^{r}m_iV(f_i)=\mathrm{div}(f)=\mathrm{div}(g)=\sum_{j=1}^{s}n_jV(g_j). \tag{10.2.6}$$

La proposizione segue subito dal **Corollario 10.2.7** e dall'uguaglianza (10.2.6). □

Osservazione 10.2.9. Siano $\mathbb{S}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ e scriviamo $\mathrm{div}(f)=m_1D_1+\ldots+m_rD_r$ dove i D_i sono divisori primi distinti. Segue dalla **Proposizione 10.2.6** che $D_1,\ldots,D_r$ sono univocamente determinati a meno dell'ordine da $V(f)$: sono le *componenti irriducibili* di $[f]$ (o di $V(f)$). La *molteplicità* della componente D_i è data da m_i.

10.2.2 Punti lisci e singolari

In questa sottosezione *non* assumiamo che il campo $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Siano $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ e $p \in \mathbb{S}$. Sia $X\colon \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate *centrato* in p cioè tale che $X(p) = \mathbf{0}$. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ e scriviamo

$$f \circ X^{-1} = \phi_d + \phi_{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}, \qquad \phi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i, \quad \phi_d \neq 0. \tag{10.2.7}$$

(Attenzione: del definire il grado di f si richiede che il polinomio omogeneo ϕ_{d+e} sia non nullo, qui richiediamo che ϕ_d sia non nullo.) Notiamo che $p \in V(f)$ se e solo se $d > 0$, e quindi se $d > 0$ in un sistema di coordinate centrato in p allora $d > 0$ in ogni altro sistema di coordinate centrato in p.

Proposizione 10.2.10. *Mantenendo la notazione appena introdotta, supponiamo che $Y\colon \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sia un altro sistema di coordinate* centrato *in p e scriviamo*

$$f \circ Y^{-1} = \psi_{d'} + \psi_{d'+1} + \ldots + \psi_{d'+e'}, \qquad \psi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i, \quad \psi_{d'} \neq 0.$$

Allora $d = d'$.

Dimostrazione. Siccome $\mathbf{0} = X(p) = Y(p)$ esiste $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che la matrice del cambiamento di base sia $X = A \cdot Y$, e quindi

$$f \circ Y^{-1} = f \circ X^{-1}(A \cdot Y) = \phi_d(A \cdot Y) + \phi_{d+1}(A \cdot Y) + \ldots + \phi_{d+e}(A \cdot Y).$$

Siccome $\phi_i(A \cdot Y) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]_i$ e $\phi_i(A \cdot Y) = 0$ solo se $\phi_i = 0$ segue la proposizione. $\square$

La **Proposizione 10.2.10** permette di dare la seguente definizione.

Definizione 10.2.11. Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ e $p \in \mathbb{S}$. La *molteplicità di* $[f]$ in p è data dal numero naturale d tale che valga (10.2.7) per un sistema di coordinate affini *centrato* in p: la denotiamo $\mathrm{mult}_p([f])$. (Osservate che se moltiplichiamo f per $\lambda \in \mathbb{K}^*$ allora le ϕ_i di (10.2.7) vengono sostituite da $\lambda\phi_i$ e quindi d *non* dipende dal rappresentante della classe di equivalenza $[f]$.)

Osservazione 10.2.12. Sia $X\colon \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un arbitrario sistema di coordinate affini su $\mathbb{S}$ e $(a_1, \ldots, a_n) = X(p)$. Allora

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \\ p & \mapsto & (x_1(p) - a_1, \ldots, x_n(p) - a_n) \end{array}$$

è un sistema di coordinate affini su $\mathbb{S}$ centrato in p. Possiamo scrivere

$$f \circ X^{-1} = \phi_d + \phi_{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}, \qquad \phi_i \in \mathbb{K}[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]_i, \quad \phi_d \neq 0, \tag{10.2.8}$$

cioè lo sviluppo di Taylor (algebrico) di $f \circ X^{-1}$ vicino $(a_1, \ldots, a_n)$. Allora $\mathrm{mult}_p([f]) = d$.

Esempio 10.2.13. Sia $f \in \mathbb{K}[x]$ di grado strettamente positivo, e $[f]$ l'associata ipersuperficie di $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$. Sia $a \in V(f)$; allora $\mathrm{mult}_a([f])$ è la moletplicità di a come radice dell'equazione $f = 0$, cioè il massimo esponente m tale che $(x - a)^m$ divide f. Infatti se m è tale esponente si ha che $f = (x - a)^m g$ dove $g \in \mathbb{K}[x]$ con $g(a) \neq 0$. La coordinata affine $t := (x - a)$ è centrata in a: sostituendo nella f otteniamo

$$f(a + t) = t^m(b_0 + b_1 t + \ldots + b_i t^i + \ldots + b_d t^d), \qquad b_0 \neq 0.$$

Segue che $\mathrm{mult}_a([f]) = m$, come asserito.

Ricordiamo che $\mathrm{mult}_p([f]) > 0$ equivale a $p \in V(f)$.

Definizione 10.2.14. Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ e $p \in V(f)$ (e quindi $\mathrm{mult}_p([f]) > 0$). La $[f]$ è *liscia in p* (equivalentemente p è un punto liscio di $[f]$) se $\mathrm{mult}_p([f]) = 1$, è *singolare in p* se $\mathrm{mult}_p([f]) > 1$ (equivalentemente p è un punto singolare di $[f]$).

10.2.3 Derivate formali

Un modo conveniente di determinare i punti lisci/singolari di una ipesuperficie $[f]$ è di calcolare le derivate parziali di f. Se il campo $\mathbb{K}$ non è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ le derivate parziali non sono definite come il limite di rapporti incrementali (ma vedi l'**Esercizio 10.5** per una versione algebrica della definizione con i rapporti incrementali), bensì formalmente. Ricordiamo che se $I = (i_1, \ldots, i_n)$ è un n-multi-indice, quindi $i_k \in \mathbb{N}$ per $1 \leq k \leq n$, poniamo $x^I := x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, e che un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si scrive in modo unico come $f = \sum_I a_I x^I$ dove la somma è su tutti gli n-multi-indici, $a_I \in \mathbb{K}$ e $a_I = 0$ per quasi tutti gli I (cioè tutti al di fuori di un insieme finito). Denotiamo e_s il multi-indice $(\delta_{1s}, \ldots, \delta_{ks}, \ldots, \delta_{ns})$. Per $1 \leq s \leq n$ *definiamo* la derivata parziale $\partial/\partial x_s$ come l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \stackrel{\partial/\partial x_s}{\longrightarrow} & \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \\ \sum_I a_I x^I & \mapsto & \sum_I i_s a_I x^{(I-e_s)} \end{array} \tag{10.2.9}$$

(Se $i_s = 0$ si intende che $i_s a_I x^{(I-e_s)}$ è uguale a 0 anche se il monomio $x^{(I-e_s)}$ non è definito.) Come d'abitudine denotiamo $\partial/\partial x_s(f)$ con $\partial f/\partial x_s$.

Proposizione 10.2.15. *L'applicazione $\partial/\partial x_s$ definita da* (10.2.9) *ha le seguenti proprietà:*

1. $\partial f/\partial x_s = 0$ *se* $f \in \mathbb{K}$,
2. $\partial(f+g)/\partial x_s = \partial f/\partial x_s + \partial g/\partial x_s$ *per* $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *e*
3. $\partial(f \cdot g)/\partial x_s = (\partial f/\partial x_s) \cdot g + f \cdot (\partial g/\partial x_s)$ *per* $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. *(Vale la regola di Leibniz.)*

Dimostrazione. La (1) e la (2) seguono immediatamente dalla definizione. Per verificare la (3) osserviamo che per (2) è sufficiente verificare la regola di Leibniz per il prodotto di due monomi: lasciamo la facile verifica al lettore. □

Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ e $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$: spiegheremo come determinare quali sono i punti lisci/singolari di $[f]$ calcolando derivate parziali. Un sistema di coordinate affini $X\colon \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ identifica $\mathbb{S}$ con $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Sia $p \in V(f)$. Siccome $[f]$ è liscia in p se e solo se l'ipersuperficie $[f \circ X^{-1}]$ è liscia nel punto $X(p)$ possiamo assumere che $\mathbb{S}$ sia lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Proposizione 10.2.16. *Siano $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $a \in V(f)$. Allora $[f]$ è liscia in a se e solo se esiste $1 \leq i \leq n$ tale che $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \neq 0$.*

Dimostrazione. Segue dall'**Osservazione 10.2.12**. Infatti scriviamo (10.2.8), calcoliamo le derivate parziali di f e valutiamole in a: sono tutte nulle se e solo se $d > 1$ e questo dimostra la proposizione. □

Esempio 10.2.17. Siano $d > 0$ e $f := (1 - \sum_{i=1}^n x_i^d) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Se $\operatorname{char}\mathbb{K}$ non divide d (in particolare se $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$) allora l'ipersuperficie $[f]$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è liscia in ogni punto di $V(f)$. Infatti $\partial f/\partial x_i = d x_i^{d-1}$ e quindi se a è tale che $\partial f(a)/\partial x_i = 0$ allora $a = \mathbf{0}$, ma $\mathbf{0} \notin V(f)$. Se invece $\operatorname{char}\mathbb{K}$ divide d allora l'ipersuperficie $[f]$ è singolare in ogni punto di $V(f)$ perchè $\partial f(a)/\partial x_i = 0$ per ogni $a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Osservazione 10.2.18. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $[f]$ sia liscia in $a \in V(f)$. Per la **Proposizione 10.2.16** una (almeno) delle derivate parziali $\partial f(a)/\partial x_i$ è non nulla: riordinando le coordinate possiamo assumere che $\partial f(a)/\partial x_n \neq 0$. Il Teorema della funzione implicita (detto anche di Dini) dà che l'insieme dei punti di $V(f)$ con coordinate in un opportuno (iper)parallelepipedo centrato in a è il grafico di una funzione C^1. Vale una descrizione analoga per una ipersuperfiice di uno spazio affine complesso in un intorno di un suo punto liscio. Quindi possiamo dire che (almeno se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) i punti lisci di una ipersuperficie si assomigliano tutti. D'altra parte i punti singolari *non* si assomigliano tutti: innanzitutto vengono distinti dalla molteplicità, ma anche punti con stessa moltpelicità possono essere molto diversi, per esempio la curva $[x_1^2 - x_2^m]$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ con $m \geq 2$ ha molteplicità 2 in $(0,0)$ ma se $n \neq m$ allora $[y_1^2 - y_2^n]$ non è localmente isomorfa a $[x_1^2 - x_2^m]$. (Non abbiamo definito cosa intendiamo per isomorfismo di ipersuperfici: qui potete intenderlo come un'affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ che fissa $(0,0)$, e quindi data da $X = A \cdot Y$, tale che, sostituendo a (x_1, x_2) i valori dati da $X = A \cdot Y$ nel polinomio $(x_1^2 - x_2^m)$, si ottenga $\lambda(y_1^2 - y_2^n)$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

10.2.4 Molteplicità d'intersezione di una retta e una ipersuperficie

Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Siano $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ e $L \subset \mathbb{S}$ un sottospazio affine. La restrizione $f|L$ è una funzione polinomiale e quindi se non è costante definisce un'ipersuperficie di L. In questo caso abbiamo una ben definita ipersuperficie $[f]|_L$ perchè $(\lambda f)|_L = \lambda(f|_L)$: la chiamiamo la *restrizione di* $[f]$ a L. Ora supponiamo che $p \in V(f)$ e che L sia una retta contenente p. Siccome $f(p) = 0$ abbiamo due possibilità: $f|_L = 0$ (cioè $L \subset V(f)$) oppure è definita la restrizione $[f]|_L$.

Definizione 10.2.19. Con la notazione appena introdotta, la *molteplicità d'intersezione* di $[f]$ e L in p è data da

$$\mathrm{mult}_p([f]\cdot L) := \begin{cases} \infty & \text{se } L \subset V(f), \\ \mathrm{mult}_p([f]|_L) & \text{se } L \not\subset V(f) \end{cases}$$

Se $p \notin V(f) \cap L$ poniamo $\mathrm{mult}_p([f]\cdot L) := 0$.

Il seguente risultato mette in relazione la molteplicità di un punto p di una ipersuperficie con la molteplicità d'intersezione in p di quella ipersuperficie con una retta generica contenente p.

Proposizione 10.2.20. *Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ (non necessariamente algebricamente chiuso). Siano $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ e $p \in V(f)$. Sia $L \subset \mathbb{S}$ una retta contente p. Allora*

$$\mathrm{mult}_p([f]\cdot L) \geq \mathrm{mult}_p([f]) \tag{10.2.10}$$

ed esistono rette L contenenti p tali che (10.2.10) *sia un'uguaglianza. In altre parole* $\mathrm{mult}_p([f])$ *è il minimo valore di* $\mathrm{mult}_p([f]\cdot L)$ *per $L \subset \mathbb{S}$ una retta contente p.*

Dimostrazione. Siano $d := \mathrm{mult}_p([f])$ e $X : \mathbb{S} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate affini centrate in p. Allora

$$f \circ X^{-1} = \phi_d + \phi_{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}, \qquad \phi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i, \quad \phi_d \neq 0.$$

Abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}} & \xrightarrow{R} & \{L \subset \mathbb{S} \mid L \text{ retta}, \ p \in L\} \\ [v] & \mapsto & \langle p, X^{-1}(v)\rangle \end{array}$$

(L'applicazione μ associa a v la retta per l'origine con giacitura generata da v.) Abbiamo la coordinata t sulla retta $R([v])$ definita da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} & \xrightarrow{\sim} & R(v) \\ t & \mapsto & X^{-1}(tv) \end{array}$$

Notate che la coordinata t di p è 0. Abbiamo

$$f \circ X^{-1}|_{R(v)} = \phi_d(v_1, \ldots, v_n)t^d + \phi_{d+1}(v_1, \ldots, v_n)t^{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}(v_1, \ldots, v_n)t^{d+e} \in \mathbb{K}[t]. \tag{10.2.11}$$

Segue che $\mathrm{mult}_p([f]\cdot L) \geq d$. Siccome $\phi_d \neq 0$ e il campo $\mathbb{K}$ è infinito esistono $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ tali che $\phi_d(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$; per tali $[v]$ si ha che $\mathrm{mult}_p([f]\cdot L) = d$. □

Esempio 10.2.21. Sia $f := y^2 - x^d \in \mathbb{K}[x, y]$ con $d > 2$. Allora $\mathbf{0} \in V(f)$ e la molteplicità dell'ipersuperficie $[f]$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ in $\mathbf{0}$ è uguale a 2. Sia $L \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ una retta contente $\mathbf{0}$: quindi esiste $(a, b) \in (\mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ tale che

$$L = R_{(a,b)} := \{(at, bt) \mid t \in \mathbb{K}\}.$$

Allora

$$\mathrm{mult}_{\mathbf{0}}([f]\cdot R_{(a,b)}) = \begin{cases} 2 & \text{se } b \neq 0, \\ d & \text{se } b = 0. \end{cases}$$

10.2.5 Spazio tangente

Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$.

Definizione 10.2.22. Siano $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{S}$ e $p \in V(f)$. Lo *spazio tangente a* $[f]$ *in* p è l'unione delle rette $L \subset \mathbb{S}$ contenenti p tali che $\mathrm{mult}_p([f] \cdot L) > 1$, e si denota $T_p([f])$.

Proposizione 10.2.23. *Siano* $[f]$ *una ipersuperficie di* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *e* $a \in V(f)$. *Lo spazio tangente a* $[f]$ *in* a *ha equazione cartesiana*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) = 0.$$

Dimostrazione. Se $a = \mathbf{0}$ la proposizione segue subito da (10.2.11). In generale sostituiamo alle coordinate X le coordinate $Y = (X - a)$ e osserviamo che il valore per $y = \mathbf{0}$ di $\partial f(a + y)/\partial y_i$ è uguale al valore in a di $\partial f/\partial x_i$. $\square$

In particolare la **Proposizione 10.2.23** dà che se $[f]$ è liscia in p allora $T_p([f])$ è un iperpiano, se $[f]$ è singolare in p allora $T_p([f]) = \mathbb{S}$.

10.3 Ipersuperfici proiettive

10.3.1 Componenti irriducibili

In questa sottosezione supporremo che $\mathbb{K}$ sia un campo algebricamente chiuso. Sia V uno spazio vettoriale: dimostreremo che per ipersuperfici proiettive di $\mathbb{P}(V)$ valgono risultati analoghi a quelli dimostrati nella **Sottosezione 10.2.1** per ipersupefici affini.

Definizione 10.3.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un *divisore primo* di $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme degli zeri $V(F)$ di un polinomio *omogeneo e primo* $F \colon V \to \mathbb{K}$. Il *gruppo dei divisori* di $\mathbb{P}(V)$ è il gruppo abeliano libero generato dai divisori primi di $\mathbb{P}(V)$, e si denota $\mathrm{Div}(\mathbb{P}(V))$. (Gli elementi di $\mathrm{Div}(\mathbb{P}(V))$ sono i *divisori di* $\mathbb{P}(V)$.

Lemma 10.3.2. *Sia* V *uno spazio vettoriale su un campo* $\mathbb{K}$ *(non necessariamente algebricamente chiuso). Se* $F, G \colon V \to \mathbb{K}$ *sono polinomi omogenei e* $G = F \cdot H$ *allora* H *è omogeneo. In particolare i fattori primi di un polinomio omogeneo sono omogenei.*

Dimostrazione. Scriviamo $H = h_d + h_{d+1} + \ldots + h_e$ dove $h_i \in S^i V^\vee$ e $h_d \neq 0$, $h_e \neq 0$.Se fosse $d \neq e$ seguirebbe che $G = F \cdot H$ non è omogeneo, contraddicendo l'ipotesi. $\square$

Definizione 10.3.3. Siano $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Se $F \colon V \to \mathbb{K}$ è un polinomio omogeneo non nullo e $F = c \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_s$ è una decomposizione di F in prodotto di una unità $c \in \mathbb{K}^*$ e primi $F_1, \ldots, F_s$, il *divisore di* F, denotato $\mathrm{div}(F)$ è il divisore di $\mathbb{P}(V)$ dato da

$$\mathrm{div}(F) := V(F_1) + \ldots + V(F_s). \tag{10.3.1}$$

(Notate che ciascun F_i è omogeneo per il **Lemma 10.3.2**.) Se $[F]$ è una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)$ il *divisore di* $[F]$, denotato $\mathrm{div}([F])$ è $\mathrm{div}(F)$ (la definizione è ben posta, vedi la **Definizione 10.2.3**).

Un divisore $(m_1 V(F_1) + \ldots + m_r V(F_r)) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}(V))$ è *effettivo* se $m_i > 0$ per $i = 1, \ldots, r$ (il divisore 0 è effettivo): sia $\mathrm{Div}_+(\mathbb{P}(V)) \subset \mathrm{Div}(\mathbb{P}(V))$ il monoide dei divisori effettivi. Notate che il divisore associato a una ipersuperficie è effettivo. Consideriamo l'omomorfismo di gruppi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(\mathbb{P}(V)) & \xrightarrow{\deg} & \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^r m_i V(F_i) & \mapsto & \sum_{i=1}^r m_i \deg F_i \end{array}$$

Sia $\mathrm{Div}^d(\mathbb{P}(V)) \subset \mathrm{Div}(\mathbb{P}(V))$ il sottoinsieme dei divisori di grado d e $\mathrm{Div}^d_+(\mathbb{P}(V)) := \mathrm{Div}_+(\mathbb{P}(V)) \cap \mathrm{Div}^d(\mathbb{P}(V))$. Se $[F] \in \mathbb{P}(S^d V^\vee)$ allora $\deg \mathrm{div}(F) \in \mathrm{Div}^d_+(\mathbb{P}(V))$. Segue subito dalle definizioni che l'applicazione

$$\mathbb{P}(S^d V^\vee) \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^d_+(\mathbb{P}(V)) \tag{10.3.2}$$

è suriettiva; mostreremo che è anche iniettiva.

Proposizione 10.3.4. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $F \in \mathrm{Sym}^d V^\vee$ primo. Un polinomio omogeneo $G\colon V \to \mathbb{K}$ si annulla su $\mathbf{V}(F)$ se e solo se è multiplo di F.*

Dimostrazione. Se $\dim V \le 1$ il risultato è banale, quindi possiamo supporre che $\dim V \ge 2$. Il risultato è banale anche se $G = 0$ e quindi supporremo che $G \neq 0$ Sia $\pi\colon (V \setminus \{0\}) \to \mathbb{P}(V)$ l'applicazione quoziente. Allora $V(F) = \pi^{-1}\mathbf{V}(F) \cup \{0\}$. Applicando il **Corollario 10.2.5** a $V(F)$ (notate che $\deg F > 0$ perchè F è primo) si vede che $V(F) \neq \{0\}$ e quindi $\mathbf{V}(F) \neq \emptyset$. Siccome $\mathbf{V}(F) \neq \emptyset$ e $G \neq 0$ segue che $\deg G > 0$ e perciò $V(G) = \pi^{-1}\mathbf{V}(G) \cup \{0\}$. Per ipotesi $\mathbf{V}(F) \subset \mathbf{V}(G)$ e perciò $V(F) \subset V(G)$, quindi la proposizione segue dalla **Proposizione 10.2.6**. □

Dalla **Proposizione 10.3.4** segue che se $F, G\colon V \to \mathbb{K}$ sono polinomi omogenei e primi allora $\mathbf{V}(F) = \mathbf{V}(G)$ solo se F e G sono associati. Da questo segue che l'applicazione (10.3.2) è iniettiva e perciò biunivoca.

10.3.2 Punti lisci e singolari

In questa sottosezione $\mathbb{K}$ non è necessariamente algebricamente chiuso (però ha cardinalità infinita, come sempre). Sia $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)$ e $p \in \mathbf{V}(F)$. Se $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1 tale che $p \notin \mathbb{P}(W)$ allora è definita la molteplicità in p dell'ipersuperficie affine $[F]|_{\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(W)}$, vedi (10.1.9).

Proposizione 10.3.5. *Con la notazione appena introdotta, la molteplicità in p dell'ipersuperficie affine $[F]|_{\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(W)}$ non dipende dal sottospazio vettoriale $W \subset V$ di codimensione 1.*

Dimostrazione. Sia $p = [v]$. Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale di codimensione 1 tale che $v \notin U$. Esistono coordinate omogenee $X\colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$ e $Y\colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$ su $\mathbb{P}(V)$ tali che

$$\ker X_0 = W, \qquad X(v) = (1,0,\ldots,0), \qquad \ker Y_0 = U, \qquad Y(v) = (1,0,\ldots,0).$$

Siano $d := \deg F$, $r := \mathrm{mult}_p(\mathbb{P}(V)_{X_0})$ e $s := \mathrm{mult}_p(\mathbb{P}(V)_{Y_0})$. Possiamo scrivere

$$F \circ X^{-1} = A_r X_0^{d-r} + \ldots + A_{r+i} X_0^{d-r-i} + \ldots + A_d, \qquad A_i \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]_i, \qquad A_r \neq 0.$$

e analogamente

$$F \circ Y^{-1} = B_s Y_0^{d-s} + \ldots + B_{s+i} X_0^{d-s-i} + \ldots + B_d, \qquad B_i \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]_i, \qquad B_s \neq 0.$$

Sia $X = T \cdot Y$ la formula del cambiamento di coordinate. Siccome $X(v) = (1,0,\ldots,0) = Y(v)$ si ha che

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t_{01} & \ldots & t_{0n} \\ 0 & t_{11} & \ldots & t_{0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Segue che

$$F \circ Y^{-1} = A_r \left(\sum_{j=1}^n t_{1j} Y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^n t_{nj} Y_{nj}\right) \left(Y_0 + \sum_{j=1}^n t_{0j} Y_{0j}\right)^{d-r} + \ldots$$

$$+ A_{r+i} \left(\sum_{j=1}^n t_{1j} Y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^n t_{nj} Y_{nj}\right) \left(Y_0 + \sum_{j=1}^n t_{0j} Y_{0j}\right)^{d-r-i} + \ldots + A_d \left(\sum_{j=1}^n t_{1j} Y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^n t_{nj} Y_{nj}\right).$$

Siccome T è invertibile la matrice $n \times n$ con entrate t_{ij} per $1 \le i,j \le n$ è anch'essa invertibile; ne segue che $A_r(\sum_{j=1}^n Y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^n Y_{nj}) \in \mathbb{K}[Y_1,\ldots,Y_n]_r$ è non nullo e che è uguale a B_s, in particolare $r = s$. □

Per la **Proposizione 10.3.5** ha senso la seguente definizione.

Definizione 10.3.6. Sia $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)$ e $p \in \mathbf{V}(F)$. La *molteplicità di* $[F]$ *in* p è la molteplicità in p dell'ipersuperficie affine $[F]|_{\mathbb{P}(V)\backslash\mathbb{P}(W)}$ dove $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1 tale che $p \notin \mathbb{P}(W)$.

Esempio 10.3.7. Sia $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1]$ data da

$$F = u \cdot \prod_{i=1}^{r} (b_i X_0 - a_i X_1)^{m_i}, \qquad u \in \mathbb{K}^*, \quad (a_i, b_i) \neq (0,0), \quad [a_i, b_i] \neq [a_j, b_j] \text{ se } i \neq j.$$

Quindi $p_i := [a_i, b_i] \in V(F)$. Per l'**Esempio 10.2.13** si ha che $\operatorname{mult}_{p_i}([F]) = m_i$.

Esempio 10.3.8. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e $F \in \mathbb{K}[X,Y,Z]$ dato da $F := Y^2Z - X(X-aZ)(X-bZ)$. Allora $p := [0,0,1] \in V(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ e

$$\operatorname{mult}_p([F]) = \begin{cases} 1 & \text{se } ab \neq 0, \\ 2 & \text{se } ab = 0. \end{cases}$$

Infatti p appartiene al piano affine $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \backslash V(Z))$ con coordinate affini $x := X/Z$ e $y := Y/Z$, e $[F]|_{(\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}\backslash V(Z))}$ è l'ipersuperficie $[f]$ dove

$$f = y^2 - x(x-a)(x-b) = y^2 - abx + (a+b)x^2 - x^3.$$

Ricordiamo

Definizione 10.3.9. Sia $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)$ e $p \in \mathbf{V}(F)$ (e quindi $\operatorname{mult}_p([F]) > 0$). La $[F]$ è *liscia* in p se $\operatorname{mult}_p([F]) = 1$ ed è *singolare* in p se $\operatorname{mult}_p([F]) > 1$.

Notate che $[F]$ è liscia in $p = [v]$ se e solo se per ogni sottospazio $W \subset V$ di codimensione 1 non contenente v è liscia in p l'ipersuperficie affine $[F]|_{(\mathbb{P}(V)\backslash\mathbb{P}(W))}$.

10.3.3 Intersezione di retta e ipersuperficie

Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo su $\mathbb{K}$. Siano $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ un sottospazio proiettivo. La restrizione $F|U$ è una funzione polinomiale omogenea e quindi se non è nulla definisce un'ipersuperficie di $\mathbb{P}(U)$. In questo caso abbiamo una ben definita ipersuperficie $[F|_{\mathbb{P}(U)}$ rappresentata da $F|_U$, che chiamiamo la *restrizione di* $[F]$ a $\mathbb{P}(U)$. Ora supponiamo che $p \in \mathbf{V}(F)$ e che $\Lambda = \mathbb{P}(U)$ sia una retta contenente p. Siccome $F(p) = 0$ abbiamo due possibilità: $F|_U = 0$ (cioè $\Lambda \subset V(F)$) oppure è definita la restrizione $[F]|_\Lambda$.

Definizione 10.3.10. Con la notazione appena introdotta, la *molteplicità d'intersezione* di $[F]$ e Λ in p è data da

$$\operatorname{mult}_p([F] \cdot \Lambda) := \begin{cases} \infty & \text{se } \Lambda \subset \mathbf{V}(F), \\ \operatorname{mult}_p([F]|_\Lambda) & \text{se } \Lambda \not\subset \mathbf{V}(F) \end{cases}$$

Se $p \notin \mathbf{V}(F) \cap \Lambda$ poniamo $\operatorname{mult}_p([F] \cdot \Lambda) := 0$.

Proposizione 10.3.11. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione* 2 *e $[F]$ una ipersupeficie di $\mathbb{P}(V)$. Allora* $\operatorname{mult}_p([F])$ *è nulla per p fuori da un sottoinsieme finito di $\mathbb{P}(V)$. Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso allora*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}(V)} \operatorname{mult}_p([F]) = \deg F. \tag{10.3.3}$$

Dimostrazione. Scegliendo coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$ possiamo assumere che $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Se $[a,b] \in \mathbf{V}(F)$ allora $(bX_0 - aX_1)|F$; siccome la cardinalità dei fattori primi di F a meno di associati è finita segue che $\mathbf{V}(F)$ è finito: la prima affermazione segue perchè $\operatorname{mult}_p([F]) = 0$ se $p \notin \mathbf{V}(F)$. Ora supponiamo che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Allora il polinomio $F(1,x) \in \mathbb{K}[x]$ è un prodotto di fattori lineari.

Sia $d := \deg F$: per l'omogeneità di F abbiamo $F = X_0^d F(1, X_1/X_0)$. Sostituendo $F(1, X_1/X_0)$ con il corrispondente prodotto di fattori lineari si ottiene che

$$F = u \cdot \prod_{i=1}^{r} (b_i X_0 - a_i X_1)^{m_i}, \qquad u \in \mathbb{K}^*, \quad (a_i, b_i) \neq (0,0), \quad [a_i, b_i] \neq [a_j, b_j] \text{ se } i \neq j.$$

Dall'**Esempio 10.3.7** segue che $\mathrm{mult}_{[a_i,b_i]}([F]) = m_i$: sommando otteniamo (10.3.3). □

Corollario 10.3.12. *Siano $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)$ e $\Lambda \subset \mathbb{P}(V)$ una retta. Se $\Lambda \not\subset \mathbf{V}(F)$ allora*

$$\sum_{p \in \Lambda} \mathrm{mult}_p([F]) = \deg F.$$

Notiamo che un risultato analogo *non* vale per ipersuperfici di uno spazio proiettivo. Basta già considerare un iperpiano e una retta parallela all'iperpiano. In generale se $[f]$ è una ipersuperficie di uno spazio affine $\mathbb{S}$ e $L \subset \mathbb{S}$ una retta tale che $L \not\subset V(f)$, si ha che

$$\sum_{p \in L} \mathrm{mult}_p([f] \cdot L) \leq \deg f.$$

10.3.4 Spazio tangente proiettivo

Definizione 10.3.13. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo su $\mathbb{K}$. Sia $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)$ e $p \in \mathbf{V}(f)$. Lo *spazio tangente (proiettivo) a* $[F]$ *in* p è l'unione delle rette $\Lambda \subset \mathbb{P}(V)$ contenenti p tali che $\mathrm{mult}_p([F] \cdot \Lambda) > 1$, e si denota $\mathbf{T}_p([F])$.

Osservazione 10.3.14. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di codimensione 1 e tale che $p \notin \mathbb{P}(W)$. Sia $[f]$ la restrizione di $[F]$ a $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$. Segue dalle definizioni che $\mathbf{T}_p([F])$ è la chiusura del sottospazio affine $T_p([f])$ (vedi l'**Osservazione 9.2.5**), ovvero $\mathbb{P}(V)$ se p è un punto singolare di $[F]$ e un iperpiano se p è un punto liscio di $[F]$.

Nel calcolare un'equazione cartesiana dello spazio tangente a una ipersuperficie in un punto del suo supporto possiamo assumere di avere a che fare con una ipersuperficie di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Proposizione 10.3.15. *Siano $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $[a] \in \mathbf{V}(F)$. Lo spazio tangente a $[F]$ in $[a]$ ha equazione cartesiana*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F(a)}{\partial X_i} X_i = 0. \tag{10.3.4}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $[a] \in \mathbb{P}^n_{X_0}$, ovvero $a_0 \neq 0$. Siccome le derivate parziali di F sono omogenee il sottospazio proiettivo di equazione cartesiana (10.3.4) non cambia se riscaliamo le coordinate omogenee per un elemento di $\mathbb{K}^*$, quindi possiamo assumere che $a_0 = 1$. Sia $f := F(1, x_1, \ldots, x_n)$: allora $[F]|_{\mathbb{P}^n_{X_0}} = [f]$. Per la **Proposizione 10.2.23** e l'**Osservazione 10.3.14** basta dimostrare che l'intersezione di $\mathbb{P}^n_{X_0}$ con il sottospazio proiettivo di equazione cartesiana (10.3.4) è uguale al sottospazio affine di equazione cartesiana

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_i} (x_i - a_i) = 0. \tag{10.3.5}$$

Ponendo $X_0 = 1$ nella (10.3.4) vediamo che l'intersezione che ci interessa ha equazione cartesiana (affine)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(a)}{\partial X_i} x_i + \frac{\partial F(a)}{\partial X_0} = 0. \tag{10.3.6}$$

Siccome F è omogenea vale la relazione di Eulero

$$(\deg F) F = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i} X_i. \tag{10.3.7}$$

Ma $F(a) = 0$ e perciò valutando in a ne segue che

$$\frac{\partial F(a)}{\partial X_0} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(a)}{\partial X_i} a_i. \tag{10.3.8}$$

Sostituendo l'espressione (10.3.8) nella (10.3.6) vediamo che l'intersezione che ci interessa ha equazione cartesiana (affine) (10.3.5). Questo dimostra che l'equazione cartesiana dello spazio tangente a $[F]$ è (10.3.4) se $a_0 \neq 0$; se $a_i \neq 0$ per un $1 \leq i \leq n$ si ottiene il risultato riordinando le coordinate (o ripetendo l'argomento con X_0 sostituito da X_0). □

Corollario 10.3.16. *Sia $[F]$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $[a] \in \mathbf{V}(F)$. Allora $[F]$ è singolare in $[a]$ se e solo se*

$$0 = \frac{\partial F(a)}{\partial X_0} = \ldots = \frac{\partial F(a)}{\partial X_n}. \tag{10.3.9}$$

Osservazione 10.3.17. Supponiamo che $[F]$ sia una ipersuperficie di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, di grado d, e che $\operatorname{char}\mathbb{K}$ *non* divida d. Se vale (10.3.9) allora segue dalla formula di Eulero (10.3.7) che $[a] \in V(F)$. Quindi con questa ipotesi $V(F)$ è singolare in $[a]$ se e solo se vale (10.3.9).

Esempio 10.3.18. Sia $d > 0$ e $F \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_d$ data da $F := (X_0^d - \sum_{i=1}^n X_i^d)$. Sia $a := (1, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^{n+1}$: allora $[a] \in \mathbf{V}(F)$ e la (10.3.4) dà che l'equazione cartesiana del piano tangente $\mathbf{T}_{[a]}([F])$ è

$$dX_0 - dX_1 = 0.$$

10.4 Quadriche

Una *quadrica proiettiva* è una ipersuperficie di grado 2 di uno spazio proiettivo. Analogamente una *quadrica affine* è una ipersuperficie di grado 2 di uno spazio affine. Studieremo le quadriche proiettive e poi vedremo come si possano capire meglio le quadriche affini considerandole come restrizioni di quadriche proiettive. In tutto questo capitolo supporremo tacitamente che $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$. Ricordiamo che con questa ipotesi c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle forme quadratiche di uno spazio vettoriale V e l'insieme delle forme bilineari simmetriche su V: alla forma blineare simmetrica $F\colon V \times V \to \mathbb{K}$ associamo la forma quadratica $q\colon V \to \mathbb{K}$ definita da $q(v) := F(v, v)$ e alla forma quadratica $q\colon V \to \mathbb{K}$ associamo la forma bilineare simmetrica $F\colon V \times V \to \mathbb{K}$ definita da

$$F(v, w) = 2^{-1}(q(v + w) - q(v) - q(w)).$$

(La corrispondenza è anche un isomorfismo di spazi vettoriali.)

Siamo interessati principalmente al supporto $V(q)$ di una quadrica (proiettiva): per delle immagini di superfici quadriche andate (per esempio) su:

http://hardycalculus.com/calcindex/IE_quadric.htm
http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge.html

10.4.1 Generalità sulle quadriche proiettive

Proposizione 10.4.1. *Sia $[q]$ una quadrica di $\mathbb{P}(V)$ e sia $F\colon V \times V \to \mathbb{K}$ la forma bilineare simmetrica associata a q. Lo spazio tangente a $[q]$ in un punto $[v] \in \mathbf{V}(q)$ è uguale a*

$$\mathbb{P}(v^{\perp}) := \{[w] \mid F(v, w) = 0\}.$$

Dimostrazione. Cominciamo osservando che $[v] \in \mathbb{P}(v^{\perp})$: infatti $F(v, v) = q(v) = 0$ perchè $[v] \in \mathbf{V}(q)$. Detto questo, rimane da dimostrare che se $v, w \in V$ sono linearmente indipendenti allora la retta $\mathbb{P}(\langle v, w\rangle)$ appartiene a $\mathbb{P}(v^{\perp})$ se e solo se appartiene a $\mathbf{T}_{[v]}([q])$. Per definizione la retta $\Lambda := \mathbb{P}(\langle v, w\rangle)$ appartiene a $\mathbf{T}_{[v]}([q])$ s e solo se $\operatorname{mult}_{[v]}(\Lambda \cdot [q]) \geq 2$. La base $\{v, w\}$ di $\langle v, w\rangle$ definisce coordinate omogenee $[s, t]$ sulla retta $\mathbb{P}(\langle v, w\rangle)$: il punto di coordinate omogenee $[s, t]$ è $[sv + tw]$. Abbiamo

$$q(sv + tw) = F(sv + tw, sv + tw) = 2F(v, w)st + F(w, w)t^2.$$

Il punto $[v]$ ha coordinate omogenee $[1,0]$: passando alla coordinata affine t/s, che è centrata in $[v]$, vediamo che $\mathrm{mult}_{[v]}(\Lambda\cdot[q]) \geq 2$ se e s solo se $F(v,w)=0$, ovvero se e solo se la retta $\mathbb{P}(\langle v,w\rangle)$ appartiene a $\mathbb{P}(v^{\perp})$ (ricordate che $q(v)=0$ e quindi se $w \in v^{\perp}$ ne segue che $\langle v,w\rangle \subset v^{\perp}$). □

Ricordiamo che la forma bilineare F definisce un'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}_F} & V^{\vee} \\ v & \mapsto & (w \mapsto F(v,w)) \end{array} \tag{10.4.1}$$

Corollario 10.4.2. *Sia $[q]$ una quadrica di $\mathbb{P}(V)$ e sia $F\colon V \times V \to \mathbb{K}$ la forma bilineare simmetrica associata a q. Un punto $[v] \in \mathbb{P}(V)$ è un punto singolare di $[q]$ se e solo se $v \in \ker \mathcal{L}_F$.*

Definizione 10.4.3. Una quadrica $[q]$ di $\mathbb{P}(V)$ è *singolare* (o *degenere*) se ha punti singolari, o equivalentemente (per il **Corollario 10.4.2**) se la forma bilineare simmetrica associata a q è degenere.

Sia $[q]$ una quadrica non-degenere di $\mathbb{P}(V)$ e sia F la forma bilinare simmetrica associata a q. Siccome $[q]$ è non-degenere $\mathcal{L}_F$ è un isomorfismo: poniamo $\Phi_q := \mathbb{P}(\mathcal{L}_F)$. Quindi abbiamo un isomorfismo di spazi proiettivi

$$\Phi_q\colon \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V)^{\vee}. \tag{10.4.2}$$

definito da q. Se $[v] \in \mathbb{P}(V)$ l'iperpiano

$$\Phi_q([v]) = \{[w] \in \mathbb{P}(V) \mid F(v,w)=0\}$$

si chiama l'iperpiano *polare* di $[v]$. Qual'è il significato geometrico dell'iperpiano polare di $[v]$? Se $[v] \in \mathbf{V}(q)$ allora $\Phi_q([v])$ è l'iperpiano tangente a $[F]$ in $[v]$ per la **Proposizione 10.4.1**. Se $[v] \notin \mathbf{V}(q)$ allora l'intersezione di $\Phi_q([v])$ con $\mathbf{V}(q)$ è l'insieme dei punti di $\mathbf{V}(q)$ tali che $[v] \in \mathbf{T}_{[v]}([q])$: se il campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso tali punti generano $\Phi_q([v])$ e quindi lo determinano.

Ora studieremo una quadrica $[q]$ degenere di $\mathbb{P}(V)$.

Definizione 10.4.4. Sia $[q]$ una quadrica di $\mathbb{P}(V)$. Il *luogo singolare di* $[q]$ è l'insieme dei punti singolari di $[q]$ e si denota $\mathrm{Sing}[q]$. Per il **Corollario 10.4.2** $\mathrm{Sing}[q]$ è il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\ker \mathcal{L}_F) \subset \mathbb{P}(V)$, dove F è la forma bilineare simmetrica associata a q.

Proposizione 10.4.5. *Siano q una forma quadratica su V e $F\colon V \times V \to \mathbb{K}$ la forma bilineare simmetrica associata a q. Sia $\pi\colon V \to V/\ker \mathcal{L}_F$ l'applicazione quoziente. Esiste una forma quadratica $\overline{q}\colon (V/\ker \mathcal{L}_F) \to \mathbb{K}$ non-degenere tale che*

$$q(v) = \overline{q}(\pi(v)) \tag{10.4.3}$$

per ogni $v \in V$.

Dimostrazione. Siano $w \in \ker \mathcal{L}_F$ e $v \in V$: allora

$$q(v+w) = F(v+w, v+w) = q(v) + 2F(v,w) + q(w) = q(v).$$

Questo dimostra che esiste un'applicazione $\overline{q}\colon (V/\ker \mathcal{L}_F) \to \mathbb{K}$ tale che valga (10.4.3). La $\overline{q}$ è una forma quadratica perchè lo è q. Rimane da dimostrare che $\overline{q}$ è non-degenere. La forma bilineare associata a $\overline{q}$ è l'appplicazione lineare

$$V/\ker \mathcal{L}_F \xrightarrow{\overline{\mathcal{L}_F}} \mathrm{Ann}(\ker \mathcal{L}_F) \cong (V/\ker \mathcal{L}_F)^{\vee}$$

indotta da $\mathcal{L}_F$. Dobbiamo dimostrare che $\overline{\mathcal{L}}_F$ è un isomorfismo. Supponiamo che esista $\overline{v}_0 \in \ker(\overline{\mathcal{L}}_F)$ non nullo. Allora $v_0 \in V$ non appartiene a $\ker \mathcal{L}_F$ e però $F(v_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$, cioè $v_0 \in \ker \mathcal{L}_F$, contraddizione. □

La **Proposizione 10.4.5** giustifica la seguente definizione.

Definizione 10.4.6. Siano V uno spazio vettoriale, $W \subset V$ un sottospazio vettoriale e $\pi\colon V \to V/W$ l'applicazione quoziente. Una ipersuperficie $[G]$ di $\mathbb{P}(V)$ è un *cono di vertice* $\mathbb{P}(W)$ se esiste un polinomio omogeneo $\overline{G}\colon V/W \to \mathbb{K}$ tale che

$$G(v) = \overline{G}(\pi(v)) \tag{10.4.4}$$

per ogni $v \in V$.

Osservazione 10.4.7.

1. Una ipersuperficie $[G]$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è un cono di vertice il sottospazio proiettivo di equazioni cartesiane
$$0 = X_0 = \ldots = X_r$$
se solo se $G \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_r]$.

2. Supponiamo che una ipersuperficie $[G]$ di $\mathbb{P}(V)$ sia un cono di vertice $\mathbb{P}(W)$. La prima osservazione è che $\mathbb{P}(W) \subset V(G)$: infatti per definizione $G|_W = 0$. La seconda osservazione è che se $[v] \in V(G)$ allora la spazio proiettivo generato da $\mathbb{P}(W)$ e $[v]$ è contenuto in $V(G)$. Infatti sia $[u]$ un punto di questo sottospazio: allora $u = w + \lambda v$ dove $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, e quindi
$$G(u) = G(w + \lambda v) = \overline{G}(\pi(w + \lambda v)) = \overline{G}(\pi(\lambda v)) = \overline{G}(\lambda\pi(v)) = \lambda^d\overline{G}(\pi(v)) = 0,$$
dove $d := \deg \overline{G}$. In altre parole $V(G)$ è spazzato da sottospazi proiettivi di dimensione uguale a $\dim W$: nel caso in cui $\mathbb{P}(W)$ sia un punto è quello che si chiama un cono - questo rende ragione della terminologia.

3. Supponiamo che una ipersuperficie $[G]$ di $\mathbb{P}(V)$ sia un cono di vertice un punto p. Sia $U \subset V$ un sottospazio vettorale di codimensione 1 e consideriamo l'ipersuperficie affine $[G]|_{(\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(U))}$: se $p \notin \mathbb{P}(U)$ il suo supporto è unione di rette (affini) contenenti p (un cono affine), ma se $p \in \mathbb{P}(U)$ il suo supporto è u cilindro, ovvero è unione di rette parallele a una retta data.

Esempio 10.4.8.

1. Sia $\mathbb{P}(V)$ una retta proiettiva. Una quadrica proiettiva $[q]$ di $\mathbb{P}(V)$ è degenere se e solo se $q = l^2$ dove $l \in (V^\vee \setminus \{\mathbf{0}\})$.

2. Sia $[q]$ una quadrica proiettiva degenere di un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ su un campo $\mathbb{K}$ *algebricamente chiuso*: allora $q = l_1 \cdot l_2$ dove $l_1, l_2 \in (V^\vee \setminus \{\mathbf{0}\})$. Se l_1, l_2 sono linearmente indipendenti $\mathrm{Sing}[q]$ è il punto $(\ker l_1 \cap \ker l_2)$, se l_1, l_2 sono linearmente dipendenti $\mathrm{Sing}[q]$ è la retta $\mathbb{P}(\ker l_1) = \mathbb{P}(\ker l_2)$.

3. Abbiamo visto che una quadrica proiettiva degenere di un piano su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso è riducibile. D'altra parte una quadrica proiettiva degenere di uno spazio proiettivo di dimensione almeno 3 (su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso) non è necessariamente riducibile.

10.4.2 Quadriche proiettive a meno di proiettività

Saremo interessati al seguente problema: date quadriche $[q_1]$ e $[q_2]$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ come decidiamo se i loro supporti sono proiettivamente equivalenti? In verità daremo la nozione di equivalenza proiettiva per le quadriche e discuteremo l'equivalenza nel caso in cui il campo è algebricamente chiuso e nel caso in cui è il campo reale. L'equivalenza proiettiva di due quadriche implica che i loro supporti sono proiettivamenete equivalenti, in generale il viceversa non è vero, ma lo è nei casi che tratteremo.

Azione delle proiettività sulle ipersuperfici

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Se $P \in \mathrm{Sym}^d V^\vee$ (cioè P è un polinomio omogeneo di grado d oppure il polinomio nullo) e $g \in \mathrm{GL}(V)$ poniamo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{gP} & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & P(g^{-1}v) \end{array}$$

Esempio 10.4.9. Nel caso $V = \mathbb{K}^{n+1}$ abbiamo che $P \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_d$ e $g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$. Sia $g^{-1} = (c_{ij})$ dove $0 \leq i, j \leq n$. Allora

$$gP = P(\sum_{j=0}^{n} c_0 j X_j, \ldots, \sum_{j=0}^{n} c_n j X_j).$$

Scegliendo una base di V si verifica facilmente che gP è polinomiale e appartiene a $\mathrm{Sym}^d V^\vee$, vedi anche l'**Esempio 10.4.9**. La facilissima dimostrazione della seguente proposizione viene lasciata al lettore.

Proposizione 10.4.10. *Siano V uno spazio vettoriale, $P \in \mathrm{Sym}^d V^\vee$ e $g, h \in \mathrm{GL}(V)$: allora*

1. $1 \cdot P = P$
2. $(g \cdot h) \cdot P = g \cdot (h \cdot P)$
3. $V(gP) = g(V(P))$.

Se fissiamo g abbiamo l'automorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^d V^\vee & \overset{\mathrm{Sym}^d(g)}{\longrightarrow} & \mathrm{Sym}^d V^\vee \\ P & \mapsto & gP \end{array}$$

dello spazio vettoriale $\mathrm{Sym}^d V^\vee$ e quindi una proiettività $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d(g))$ di $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V^\vee)$, cioè dello spazio delle ipersuperfici di grado d. Se $\lambda \in \mathbb{K}^*$ allora $\mathrm{Sym}^d(\lambda g) = \lambda^{-d} \mathrm{Sym}^d(g)$ e quindi ha senso definire

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PGL}(V) \times \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V^\vee) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V^\vee) \\ ([g], [P]) & \mapsto & [gP] \end{array} \tag{10.4.5}$$

Definizione 10.4.11. Siano $[P_1]$ e $[P_2]$ ipersuperfici di grado d di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$: diciamo che $[P_1]$ è proiettivamenete equivalente a $[P_2]$ a $[P_2]$ se e siste $[g] \in \mathrm{PGL}(V)$ tale che $[P_1] = [g] \cdot [P_2]$.

Osservazione 10.4.12. La relazione di equivalenza proiettiva è di equivalenza: questo segue subito da (1) e (2) della **Proposizione 10.4.10**. Se $[P_1]$ è proiettivamenete equivalente a $[P_2]$ allora $V(P_1)$ è proiettivamenete equivalente a $V(P_2)$, questo segue da (3) della **Proposizione 10.4.10**.

Esempio 10.4.13. Due iperpiani di uno spazio proiettivo (cioè due ipersuperfici di grado 1) sono proiettivamente equivalenti. L'analogo non è vero appena si passa al grado 2: per esempio è chiaro che se due quadriche sono proiettivamente equivalenti allora i loro luoghi singolari hanno la stessa dimensione.

Proposizione 10.4.14. *Due ipersuperfici $[P_1]$ e $[P_2]$ di grado d di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se esistono $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e basi $\mathcal{B} := \{v_0, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{C} := \{w_0, \ldots, w_n\}$ di V tali che*

$$P_1(X_0 v_0 + \ldots + X_n v_n) = \lambda P_2(X_0 w_0 + \ldots + X_n w_n).$$

Dimostrazione. Supponiamo che esistano λ e $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Sia $g \colon V \to V$ l'automorfismo di spazio vettoriale tale che $g(w_i) = v_i$ per $0 \leq i \leq n$. Allora

$$\lambda g P_2(X_0 w_0 + \ldots + X_n w_n) = \lambda P_2(g^{-1}(X_0 w_0 + \ldots + X_n w_n)) = \lambda P_2(X_0 g^{-1}(w_0) + \ldots + X_n g^{-1}(w_n)) = P_1(X_0 v_0 + \ldots + X_n v_n).$$

La dimostrazione del viceversa è simile: la lasciamo al lettore. □

Quadriche proiettive su campi algebricamente chiusi e su $\mathbb{R}$

Proposizione 10.4.15. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Due quadriche di $\mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se le dimensioni dei loro luoghi singolari sono uguali.*

Dimostrazione. Se due quadriche $[q_1]$, $[q_2]$ di $\mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti, e quindi esiste $g \in \mathrm{PGL}(V)$ tale che $[q_1] = g \cdot [q_2]$ allora $\mathrm{Sing}[q_1] = g(\mathrm{Sing}[q_2])$ e perciò le dimensioni dei loro luoghi singolari sono uguali (per $\mathbb{K}$ arbitrario). Per dimostrare il viceversa consideriamo una forma quadratica q su V. Ragionando come nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si dimostra che esistono una base $\mathcal{B} = \{v_0, \ldots, v_n\}$ e $-1 \le a \le n$ tali che

$$q\left(\sum_{i=0}^{n}(X_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} X_i^2. \tag{10.4.6}$$

(Il caso $a = -1$ corrisponde al membro di destra uguale a 0.) Ora supponiamo che $[q]$ sia una quadrica, cioè $q \neq 0$: allora

$$\mathrm{Sing}[q] = \{[\underbrace{0, \ldots, 0}_{a}, X_{a+1}, \ldots, X_n]\}$$

e perciò $\dim \mathrm{Sing}[q] = (n - a - 1)$. Quindi $\dim \mathrm{Sing}[q]$ determina a, e perciò anche il membro di destra di (10.4.6). Per la **Proposizione 10.4.14** segue il risultato. $\square$

Prima di dare la classificazione delle quadriche proiettive reali a meno di proiettività, ricordiamo alcuni risultati sulle forme quadratiche reali. Sia V uno spazio vettoriale reale e $q\colon V \to \mathbb{R}$ una forma quadratica non-degenere. Esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ di V che diagonalizza q con coefficienti ± 1:

$$q(\sum_{i=1}^{m} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{a} x_i^2 - \sum_{i=a+1}^{m} x_i^2. \tag{10.4.7}$$

Un sottospazio $U \subset V$ è *q-isotropo* se $q|_U = 0$.

Proposizione 10.4.16. *Mantenendo le ipotesi e la notazione appena introdotte, la massima dimensione di un sottospazio q-isotropo di V è $\min\{a, n-a\}$.*

Dimostrazione. Se U è q isotropo allora è anche isotropo per la forma quadratica $(-q)$: ne segue che possiamo assumere che $a \le (n - a)$ e perciò dobbiamo dimostrare che la massima dimensione di un sottospazio q-isotropo di V è a. Siano $V_+, V_- \subset V$ i sottospazi

$$V_+ := \left\{\sum_{i=1}^{a} x_i v_i \mid x_i \in \mathbb{R}\right\}, \qquad V_- := \left\{\sum_{i=a+1}^{m} x_i v_i \mid x_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

Supponiamo che $U \subset V$ sia un sottospazio q-isotropo e supponiamo che $\dim U > a$: per Grassmann $U \cap V_- \neq \{\mathbf{0}\}$. Sia $\mathbf{0} \neq v \in U \cap V_-$. Allora $q(v) < 0$ perchè $v \in V_-$, ma d'altra parte $q(v) = 0$ perchè $v \in U$; queasta contraddizione dimostra che $\dim U \le a$. D'altra parte si verifica facilmente che il sottospazio

$$U := \left\{\sum_{i=1}^{a} t_i v_i + \sum_{i=1}^{a} t_i v_{a+i} \mid t_i \in \mathbb{R}\right\}$$

è q-isotropo: siccome $\dim U = a$ segue la proposizione. $\square$

Corollario 10.4.17. *Siano (V_i, q_i) per $i = 1, 2$ spazi quadratici reali non-degeneri della stessa dimensione. Supponiamo che la massima dimensione di un sottospazio q_1-isotropo di V_1 sia uguale alla massima dimensione di un sottospazio q_2-isotropo di V_2. Allora (V_1, q_1) è isomorfo a (V_2, q_2) o a $(V_2, -q_2)$.*

Dimostrazione. Scegliamo basi di V_1 e V_2 tali che q_1 e q_2 si diagonalizzino come in (10.4.7), con $a = a_i$ per $i = 1, 2$. Notate che la segnatura di q_i è uguale a $(2a_i - m)$. Dalla nostra ipotesi e dalla **Proposizione 10.4.16** segue che

1. $a_1 = a_2$ oppure

2. $a_1 = m - a_2$.

Se vale (1) le segnature di q_1 e q_2 sono uguali, e siccome q_1 e q_2 hanno lo stesso rango segue che (V_1, q_1) e (V, q_2) sono isomorfi. Se vale (2) le segnature di q_1 e q_2 sono opposte, e siccome q_1 e q_2 hanno lo stesso rango segue che (V_1, q_1) e $(V, -q_2)$ sono isomorfi. □

Proposizione 10.4.18. *Sia V uno spazio vettoriale reale. Due quadriche $[q_1]$, $[q_2]$ di $\mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se le dimensioni dei loro luoghi singolari sono uguali e la massima dimensione di un sottospazio proiettivo contenuto in $\mathbf{V}(q_1)$ è uguale alla massima dimensione di un sottospazio proiettivo contenuto in $\mathbf{V}(q_2)$.*

Dimostrazione. Se due quadriche $[q_1]$, $[q_2]$ di $\mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti esiste $g \in \mathrm{PGL}(V)$ tale che $[q_1] = g \cdot [q_2]$ e perciò $\mathbf{V}(q_1) = g(\mathbf{V}(q_2))$. Quindi $\mathrm{Sing}[q_1] = g(\mathrm{Sing}[q_2])$ e la g definisce una corrispondenza biunivoca tra gli insieme dei sottospazi proiettivi di $\mathbf{V}(q_1)$ e $\mathbf{V}(q_2)$, e perciò le dimensioni dei loro luoghi singolari sono uguali e la massima dimensione di un sottospazio proiettivo contenuto in $\mathbf{V}(q_1)$ è uguale alla massima dimensione di un sottospazio proiettivo contenuto in $\mathbf{V}(q_2)$. Ora dimostriamo il viceversa. Sia F_i la forma bilineare simmetrica associata a q_i e $K_i := \ker \mathcal{L}_{F_i}$. Siccome $\mathrm{Sing}([q_i]) = \mathbb{P}(\ker \mathcal{L}_{F_i})$ (vedi **??**singquad), le nostre ipotesi danno che $\dim K_1 = \dim K_2$, poniamo $k := \dim K_1 = \dim K_2$. Sia $\pi_i \colon V \to V/K_i$ l'omomorfismo quoziente e $\overline{q}_i$ la forma quadratica non-degenere tale che $q_i(v) = \overline{q}_i(\pi_i(v))$ per ogni $v \in V$, vedi la **Proposizione 10.4.5**. Se $U \subset V$ è q_i-isotropo allora $\pi_i(U)$ è $\overline{q}_i$-isotropo, e viceversa se $\overline{U} \subset V/K_i$ è $\overline{q}_i$-isotropo allora $\pi_i^{-1}(\overline{U})$ è q_i-isotropo: da questo segue che

$$\max\{\dim U \mid U \subset V \text{ è } q_i\text{-isotropo}\} = k + \max\{\dim \overline{U} \mid \overline{U} \subset V/K_i \text{ è } \overline{q}_i\text{-isotropo}\}.$$

Quindi le nostre ipotesi e il **Corollario 10.4.17** danno che $(V/K_1, \overline{q}_1)$ è isomorfo a $(V/K_2, \overline{q}_2)$ o a $(V/K_2, -\overline{q}_2)$. Ora scegliamo sottospazi $W_i \subset V$ per $i = 1, 2$ tali che $V = K_i \oplus W_i$. Allora $(W_i, q|_{W_i})$ è isomorfo a $(V/K_i, \overline{q}_i$: siccome $(V/K_1, \overline{q}_1)$ è isomorfo a $(V/K_2, \overline{q}_2)$ o a $(V/K_2, -\overline{q}_2)$ ne segue che (V, q_1) è isomorfo a (V, q_2) o a $(V, -q_2)$ e perciò le quadriche $[q_1]$, $[q_2]$ sono proiettivamente equivalenti. □

10.5 Curve

L'intersezione di n iperpiani in uno spazio proiettivo di dimensione n non è vuota (contrariamente a quello che succede in uno spazio affine, dove l'intersezione può essere vuota), e se è un insieme finito consiste di un singolo punto. La versione algebrica dello stesso risultato è che l'insieme delle soluzioni di un sistema di n equazioni lineari *omogenee* in $(n+1)$ incognite non è vuoto e se le soluzioni non banali a meno di proporzionalità sono in numero finito allora ce n'è una sola (a meno di proporzionalità). Cosa succede se invece di iperpiani consideriamo ipersuperfici qualsiasi? Consideriamo una ipersuperficie $[F]$ di grado d di una retta proiettiva. Senza alcuna ipotesi sul campo $\mathbb{K}$ possiamo dire che i punti del supporto $\mathbf{V}(F)$ sono al più d, ma la cardinalità dell'insieme delle soluzioni può essere qualsiasi numero compreso tra 0 e d, in particolare può non esserci alcuna soluzione. Se invece $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso sappiamo che, contando i punti di $\mathbf{V}(F)$ con le loro molteplicità, abbiamo sempre esattamente d punti, in particolare $\mathbf{V}(F)$ non è vuoto. Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso vale il seguente analogo (detto Teorema di Bézout) in dimensione arbitraria: l'intersezione di n ipersupefici di uno spazio proiettivo di dimensione n non è vuota e se è un insieme finito allora la sua cardinalità (i punti di intersezione vanno contati con opportune molteplicità) è uguale al prodotto dei gradi delle ipersuperfici. In questa sezione dimostreremo il seguente Teorema di Bézout per curve (piane), cioè ipersuperfici di un piano proiettivo.

Teorema 10.5.1 (Teorema di Bézout (versione debole))**.** *Siano $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$ e $[F]$, $[G]$ curve di $\mathbb{P}(V)$ senza componenti irriducibili in comune, di gradi rispettivamente m e n. Allora l'intersezione $\mathbf{V}(F) \cap \mathbf{V}(G)$ è non vuota e contiene al più $m \cdot n$ punti.*

La versione forte del Teorema di Bézout afferma che si possono assegnare molteplicità ai punti di intersezione tra $\mathbf{V}(F)$ e $\mathbf{V}(G)$ in modo che la somma delle molteplicità sia uguale a $m \cdot n$. Una dimostrazione euristica del Teorema di Bézout procede come segue. Si comincia osservando che se