Capitolo 10

Ipersuperfici

Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$. Sia $X : \mathbb{T} \xrightarrow{\sim}$ un sistema di coordinate affini su $\mathbb{T}$ e $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Studieremo i sottoinsiemi di $\mathbb{T}$ definiti come segue:

$$V(f) := \{p \in \mathbb{T} \mid f(X(p)) = 0\}.$$

Per esempio $V(f)$ è un iperpiano se f ha grado 1, è una quadrica se il grado di f è 2. Per il momento diciamo informalmente che $V(f)$ è una *ipersuperficie affine* (per la definizione formale vedi **Definizione 10.1.9**). Se vogliamo capire com è fatta una ipersuperficie affine $V(f)$ conviene considerare $\mathbb{T}$ come il complemento dell'iperpiano all'infinito di uno spazio proiettivo $\mathbf{P}$ e $V(f)$ come l'intersezione di $\mathbb{T}$ con una ipersuperficie proiettiva, che si definisce informalmente come segue. Siano $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ coordinate omogenee su $\mathbf{P}$ e $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio *omogeneo* di grado d. Sia $p \in \mathbf{P}$: diciamo che $F(p) = 0$ se e solo se $F(X_0, \ldots, X_n) = 0$ dove $[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ sono coordinate omogenee di p. Questa è una defnzione ben posta perchè $F(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \ldots, X_n)$ e quindi vale $F(X_0, \ldots, X_n) = 0$ per una scelat di coordinate omogenee se e solo se vale per ogni altra scelta. Fatte queste premesse ha senso definire

$$\mathbf{V}(F) := \{p \in \mathbf{P} \mid F(p) = 0\}.$$

Diciamo informalmente che $\mathbf{V}(F)$ è una *ipersuperficie proiettiva*, vedi **Definizione 10.1.12** per la definizione formale. Per esempio $\mathbf{V}(F)$ è un iperpiano se F ha grado 1. La relazione tra ipersuperfici proiettive e affini è data dalla seguente osservazione. Sia $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{X_0} = (\mathbf{P} \setminus \mathbb{P}(\ker X_0)$ il complemento dell'iperpiano all'infinito. Sappiamo che coordinate affini su $\mathbb{P}_{X_0}$ sono date da $x_i := X_i/X_0$ per $i = 1, \ldots, x_n$ e quindi $p \in \mathbf{P}_{X_0}$ appartiene a $\mathbf{V}(F)$ se e solo se $F(1, x_1(p), \ldots, x_n(p)) = 0$. Siccome $F(1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ questo dimostra che $\mathbf{V}(F) \cap \mathbb{P}_{X_0}$ è una ipersuperficie affine.

10.1 Preliminari

10.1.1 Fattorizzazione unica di polinomi

Se $I = (i_1, \ldots, i_n)$ è un multi-indice il *monomio* corrispondente a I è il polinomio $x^I := x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, il suo grado è $|I| = \sum_{k=1}^n i_k$. Per $d \in \mathbb{N}$ sia

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d := \left\{ \sum_{|I|=d} a_I x^I \mid a_I \in \mathbb{K} \right\}. \tag{10.1.1}$$

Notate che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d$ è un $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (ma *non* un sottoanello se $d > 0$). Abbiamo la decomposizione in somma diretta

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d. \tag{10.1.2}$$

Il *grado* di $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è definito come segue. Supponiamo che $f \neq 0$. Possiamo scrivere $f = f_d + f_{d-1} + \ldots + f_0$ dove $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i$ per $i = 0, \ldots, d$ e $f_d \neq 0$: il grado di f è d e si denota $\deg f$. Il grado del polinomio 0 si pone uguale a $(-\infty)$. Si verifica facilmente che

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}, \qquad \deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g. \tag{10.1.3}$$

Dall'uguaglianza $\deg(f \cdot g) = (\deg f + \deg g)$ segue che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è un dominio d'integrità (cioè non ha divisori di 0) e che le unità di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (cioè gli elementi invertibili) hanno grado 0 e quindi il gruppo delle unità è $\mathbb{K}^*$. Se siamo interessati a $V(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è utile sapere quali siano i fattori di f perchè a una decomposizione $f = g \cdot h$ corrisponde la decomposizione $V(f) = V(g) \cup V(h)$. Ricordiamo che se R è un dominio d'integrità un $a \in R$ *non nullo* è *irriducibile* se per ogni decomposizione $a = b \cdot c$ si ha che b o c è una unità. D'altra parte $a \in R$ non nullo è *primo* se il quoziente $R/(a)$ è un dominio d'integrità, cioè se $a|(b \cdot c)$ (cioè a divide $(b \cdot c)$) implica che $a|b$ o $a|c$. (Per convenzione l'anello in cui $1 = 0$ *non* è un dominio d'integrità e quindi una unità *non* è un primo.) Segue facilmente dalle definizioni che se a è primo allora è irriducibile, ma in generale non è vero il viceversa, per esempio nell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x, y, z]/(xy - z^2)$ l'elemento $\overline{x}$ (cioè la classe di equivalenza di x) è irriducibile ma non primo ($\overline{x}|\overline{z}^2$ ma $\overline{x}$ non divide $\overline{z}$). Due elementi non nulli $a, b \in R$ sono *associati* se $a = u \cdot b$ dove u è una unità; la relazione appena definita è di equivalenza. Un dominio d'integrità è a *fattorizzazione unica* se

1. Ogni elemento irriducibile di R è una unità o è primo.
2. Ogni elemento non nullo $a \in R$ ammette una decomposizione

   $$a = u \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \tag{10.1.4}$$

   dove u è una unità e ciascun p_i è un primo. (Il valore $n = 0$ è ammesso, si ha nel caso in cui a è una unità.)

Ricordiamo che sotto queste ipotesi la fattorizzazione (10.1.4) è unica a meno dell'ordine e della relazione dell'essere associati, cioè ogni altra decomposizione di a in fattori primi si può scrivere dopo un riordinamento come $a = u' \cdot p'_1 \cdot \ldots \cdot p'_n$ dove u' è una unità e p'_i è (un primo) associato a p_i. Una classe importante di anelli (s'intende privi di divisori dello 0) a fattorizzazione unica sono quelli a ideali principali, per esempio $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{K}[x]$ dove $\mathbb{K}$ è un campo (anche di cardinalità finita!). Se $n > 1$ l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *non* è a ideali principali (per esempio l'ideale dei polinomi che si annullano in $(0, \ldots, 0)$ non è principale) ma è a fattorizzazione unica. La dimostrazione verrà fatta per induzione sul numero di trascendenti: abbiamo un isomorfismo tra $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ dei polinomi nella trascendente x_n a coefficienti in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e quindi sarà sufficiente dimostrare che se R è un dominio d'integrità a fattorizzazione unica allora anche $R[x]$ è a fattorizzazione unica. Sia $0 \neq f \in R[x]$ dove R è un dominio d'integrità a fattorizzazione unica: possiamo scrivere

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d, \quad a_d \neq 0, \quad d \geq 0.$$

(Quindi $d = \deg f$.) Il *contenuto* di f è

$$c(f) := \text{mcd}\{a_0, a_1, \ldots, a_d\}. \tag{10.1.5}$$

Ricordiamo che il massimo comun divisore di elementi di R non tutti nulli è definito a meno di moltiplicazione per una unità. Una uguaglianza che coinvolge il contenuto di polinomi in $R[x]$ si intende che vale a meno di moltiplicazione per unità. Per esempio $c(f) = 1$ significa che il contenuto of f è una unità.

Lemma 10.1.1 (Lemma di Gauss)**.** *Sia R un dominio a fattorizzazione unica e $f, g \in R[x]$ non nulli. Allora $c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g)$.*

Dimostrazione. Scriviamo $f = c(f) f_0$ e $g = c(g) g_0$: quindi $c(f_0) = 1$ e $c(g_0) = 1$. Abbiamo che $f \cdot g = c(f) \cdot c(g) f_0 \cdot g_0$ e $c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g) c(f_0 \cdot g_0)$. Quindi è sufficiente dimostrare che $c(f_0 \cdot g_0) = 1$.

Sia $p \in R$ un primo e siano $\overline{f_0}, \overline{g_0}, \overline{f_0 \cdot g_0} \in (R/(p))[x]$ i polinomi ottenuti riducendo modulo p i coefficienti di f_0, g_0 e $f_0 \cdot g_0$ rispettivamente. Siccome $c(f_0) = 1$ e $c(g_0) = 1$ sia $\overline{f_0}$ che $\overline{g_0}$ sono non nulli. Siccome $R/(p)$ è un campo l'anello $R/(p)[x]$ è un dominio d'integrità e quindi

$$0 \neq \overline{f_0} \cdot \overline{g_0} = \overline{f_0 \cdot g_0}.$$

Quindi p non divide tutti i coefficienti di $f_0 \cdot g_0$. Siccome p è un primo arbitrario ne segue che nessun primo divide $c(f_0 \cdot g_0)$ e perciò $c(f_0 \cdot g_0) = 1$. □

Lemma 10.1.2. *Sia R un dominio a fattorizzazione unica e F il suo campo delle frazioni.*

1. *Siano $f, g \in R[x]$ e assumiamo che $f \neq 0$ e $c(f) = 1$. Allora $f|g$ in $R[x]$ se e solo se $f|g$ in $F[x]$.*
2. *Se $0 \neq f \in R[x]$ è riducibile in $F[x]$ allora è riducibile anche in $R[x]$.*
3. *Un $f \in R[x]$ non nullo è primo in $R[x]$ se e solo se*
   - *(a) $\deg f = 0$ (cioè $f \in (R \setminus \{0\})$ e f è un primo di R, oppure*
   - *(b)*
     - *i. $\deg f > 0$,*
     - *ii. $c(f) = 1$ e*
     - *iii. f è primo in $F[x]$.*

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Se f divide g in $R[x]$ allora divide g in $F[x]$ perchè $R \subset F$. Ora supponiamo che f divide g in $F[x]$. Se $g = 0$ allora f divide g in $R[x]$, quindi possiamo supporre che $g \neq 0$. Siccome $f|g$ in $F[x]$ esistono $0 \neq h \in R[x]$ and $0 \neq a \in R$ tali che $g = f \cdot (h/a)$ cioè

$$ag = f \cdot h. \tag{10.1.6}$$

Applicando il **Lemma 10.1.1** a (10.1.6) otteniamo che $ac(g) = c(h)$. Quindi $a|c(h)$ e perciò $h/a \in R[x]$ e siccome $g = f \cdot (h/a)$ abbiamo dimostrato che f divide g in $R[x]$. Ora dimostriamo (2). Per ipotesi esistono $f_1, f_2 \in F[x]$ di grado strettamente positivo tali che $f = f_1 \cdot f_2$. Possiamo scrivere $f_1 = h_1/a_1$ con $h_1 \in R[x]$, $a_1 \in R^*$ e $h_1 = c(h_1)\overline{h}_1$ con $\overline{h}_1 \in R[x]$. Quindi $\overline{h}_1|f$ in $F[x]$ e siccome (per il **Lemma 10.1.1**) $c(\overline{h}_1) = 1$ il punto (1) dà che $\overline{h}_1|f$ in $R[x]$. Ma $0 < \deg(\overline{h}_1) < \deg(f)$ e perciò f è riducibile in $R[x]$. Infine dimostriamo (3). Cominciamo supponendo che valga (a) o (b) e dimostrando che f è primo. Siano $g_1, g_2 \in R[x]$ tali che $f|(g_1 g_2)$: dobbiamo dimostrare che $f|g_1$ o $f|g_2$. Se $\deg f = 0$ e quindi f è un primo di R, allora $f|c(g_1 \cdot g_2)$ e quindi $f|c(g_1) \cdot c(g_2)$ per il **Lemma 10.1.2**. Siccome R è a fattorizzazione unica segue che $f|c(g_1)$ o $f|c(g_2)$, cioè $f|g_1$ o $f|g_1$. Ora supponiamo che $\deg f > 0$ cioè vale (b). Siccome f è primo in $F[x]$ abbiamo che f divide (in $F[x]$) almeno uno tra g_1 e g_2, diciamo g_1: siccome $c(f) = 1$ segue dal punto (1) che f divide g_1 in $R[x]$. Rimane da dimostrare che se $f \in F[x]$ è primo allora vale (a) o (b). Se $\deg f = 0$, siccome f è primo in $R[x]$ è irriducibile in $R[x]$, cioè in R, e siccome R è a fattorizzazione unica segue dal **Lemma 10.1.1** che f è primo. Ora supponiamo che $\deg f > 0$ e dimostriamo che vale (b). Abbiamo $f = c(f) \cdot f_0$ dove $f_0 \in R[x]$. Ma f è irriducibile perchè primo e quindi $c(f)$ o f_0 è una unità. Siccome $\deg f_0 > 0$ il polinomio f_0 non è una unità e quindi $c(f) = 1$. Rimane da dimostrare che f è primo in $F[x]$, e siccome $F[x]$ è a fattorizzazione unica è sufficiente dimostrare che f è irriducibile in $F[x]$: se fosse riducibile in $F[x]$ allora sarebbe riducibile in $R[x]$ per (2) e questo contraddice l'ipotesi che f sia primo. □

Teorema 10.1.3. *Se R è un dominio a fattorizzazione unica allora $R[x]$ è a fattorizzazione unica.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ogni irriducibile di $R[x]$ che non è una unità è primo e che ogni elemento non nullo di $R[x]$ ha una decomposizione (10.1.4). Supponiamo che $0 \neq f \in R[x]$ sia irriducibile e non una unità. Se $\deg f = 0$ allora f è irriducibile in R e quindi primo in R perchè R è a fattorizzazione unica; segue dal **Lemma 10.1.2** che f è primo in $R[x]$. Se $\deg f > 0$ allora $c(f) = 1$ perchè f è irriducibile. Sia F il campo delle frazioni di R; per il punto (2) del **Lemma 10.1.2** f è irriducibile in $F[x]$ e quindi primo in $F[x]$, e concludiamo che f è primo in $R[x]$ per il punto (3) del **Lemma 10.1.2**. Ora dimostriamo che ogni elemento non nullo di $R[x]$ ha una decomposizione (10.1.4). Se $\deg f = 0$ la decomposizione è quella di f come elemento di R. Se $\deg f > 0$ scriviamo $f = c(f)f_0$, decomponiamo (in R) $c(f)$ in fattori primi e scriviamo f_0 come prodotto di elementi di $R[x]$ che non possono essere decomposti come prodotto di polinomi di grado strettamente minore: segue dal **Lemma 10.1.1** e dal **Lemma 10.1.2** che ciascuno dei fattori così ottenuti di f è primo. □

Corollario 10.1.4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo arbitrario (qui non supponiamo che abbia cardinalià infinita). L'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è a fattorizzazione unica.*

Dimostrazione. Per induzione su n. Se $n = 1$ l'anello è $\mathbb{K}[x_1]$, che è a fattorizzazione unica perchè è a ideali principali. Il passo induttivo segue dal **Teorema 10.1.3** perchè c'è un isomorfismo tra $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ dei polinomi nella trascendente x_n a coefficienti in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. □

10.1.2 Ipersuperfici affini e proiettive: definizioni

Da ora in poi assumeremo tacitamente che il campo $\mathbb{K}$ è infinito e dichiareremo esplicitamente quando non verrà fatta questa ipotesi. Ricordiamo che con questa ipotesi le funzioni polinomiali $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definite da polinomi $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sono uguali solo se sono uguali i polinomi e perciò possiamo identificare polinomi in n trascendenti e funzioni polinomiali $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Cominciamo osservando che ha senso parlare di funzioni polinomiali su uno spazio affine.

Proposizione 10.1.5. *Siano $\phi \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ (il vettore colonna con entrata y_i sulla riga i-esima), e quindi*

$$\psi := \varphi(A \cdot Y + B) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n].$$

1. *Se $\phi = \phi_d + \phi_{d-1} + \ldots + \phi_0$ dove $\phi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i$, allora*
$$\psi = \phi_d(A \cdot Y) + \zeta_{d-1} + \ldots + \zeta_0, \qquad \zeta_i \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]_i.$$
2. *Si ha che $\deg \psi = \deg \phi$*
3. *Se ϕ è omogeneo lo è anche ψ.*

Dimostrazione. Facile esercizio. □

Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ e $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ una funzione. Siccome coordinate affini X e Y su $\mathbb{T}$ sono legate dalla relazione $X(p) = (A \cdot Y(p) + B)$ per ogni $p \in \mathbb{T}$ la **Proposizione 10.1.5** mostra che se f è una funzione polinomiale nelle coordinate X allora è polinomiale anche nelle coordinate Y, e perciò ha senso la seguente definizione.

Definizione 10.1.6. Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ di dimensione n. Una funzione $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ è *polinomiale* se, scelto un sistema di coordinate affini $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si ha che $f \circ X^{-1}$ è un polinomio. Il *grado* di f è il grado di $f \circ X^{-1}$, e si indica $\deg f$. Se $\mathbb{T}$ è anche uno spazio vettoriale, e quindi ha senso la moltiplicazione per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, diciamo che f è *omogenea* se esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che $f(\lambda v) = \lambda^d f(v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in \mathbb{T}$.

Osservazione 10.1.7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $X \colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$ un isomorfismo di spazi vettoriali. Una polinomio $f \colon V \to \mathbb{K}$ è omogeneo se esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che $f \circ X^{-1} \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_d$.

Osservazione 10.1.8. Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ di dimensione n e $f, g \colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ funzioni polinomiali. Allora $(f - g)$ e $f \cdot g$ sono funzioni polinomiali, e quindi l'insieme delle funzioni polinomiali su $\mathbb{T}$ è un sottoanello dell'anello delle funzioni $\mathbb{T} \to \mathbb{K}$, che denotiamo $\mathbb{K}[\mathbb{T}]$. Sia $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate affini su $\mathbb{T}$: allora

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathbb{T}] \\ \phi & \mapsto & \phi \circ X \end{array}$$

è un isomorfismo di anelli.

Studieremo i sottoinsiemi di uno spazio affine $\mathbb{T}$ che sono zeri di funzioni polinomiali: data una funzione polinomiale $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ poniamo

$$V(f) := \{p \in \mathbb{T} \mid f(p) = 0\} \tag{10.1.7}$$

e diciamo che $V(f)$ è l'*insieme degli zeri di* f. Polinomi molto diversi possono avere gli stessi zeri, per esempio se $f_n := (x^{2n}+1) \in \mathbb{R}[x]$ allora $V(f_n) = \emptyset$ per ogni n, oppure se $f := x(x-1)^2$ e $g = x^2(x-1)$ si ha che $V(f) = V(g)$. Nel primo esempio il "problema" nasce dalla circostanza che i polinomi dati hanno soluzioni complesse non reali (se $n > 0$), nel secondo dalle diverse molteplicità degli zeri. È conveniente far andare d'accordo il più possibile l'algebra con la geometria, e quindi dare la seguente definizione.

Definizione 10.1.9. Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Una *ipersuperficie* in $\mathbb{T}$ è una funzione $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ polinomiale di grado strettamente positivo, presa a meno di moltiplicazione per un elemento non nullo di $\mathbb{K}$, e si denota $[f]$. Il *supporto* di $[f]$ è l'insieme degli zeri $V(f)$. Il *grado* di $[f]$ è il grado di f.

Esempio 10.1.10. Sia $L \subset \mathbb{T}$ un iperpiano affine. Esiste un'equazione cartesiana $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ di L ($\deg f = 1$) e f è determinata a meno di moltiplicazione per un elemento non nullo di $\mathbb{K}$. Viceversa se $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ è polinomiale di grado 1 allora l'insieme degli zeri di f è una ipersuperficie affine e $V(f) = V(g)$ per $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ polinomiale di grado 1 solo se $[f] = [g]$. Quindi possiamo identificare l'insieme delle ipersuperfici di grado 1 e l'insieme degli iperpiani in $\mathbb{T}$.

Esempio 10.1.11. Una ipersuperficie di grado 2 in $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ è una classe di proporzionalità determinata da un polinomio $f := (ax^2 + bx + c)$ dove $a \neq 0$. Sia g un altro polinomio di grado 2. Se f ha radici reali allora $[f] = [g]$ solo e $V(f) = V(g)$, ma se f non ha radici reali allora $V(f) = V(g)$ per (molti) polinomi non proporzionali a f.

Ora siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $F\colon V \to \mathbb{K}$ una funzione polinomiale omogenea. Sia $[v] \in \mathbb{P}(V)$: siccome $F(\lambda v) = \lambda^d F(v)$, dove d è il grado di F, abbiamo che $F(v) = 0$ se e solo se $F(\lambda v) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Quindi ha senso porre

$$\mathbf{V}(F) := \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid F(v) = 0\}. \tag{10.1.8}$$

Diciamo che $\mathbf{V}(F)$ è l'insieme degli zeri di F in $\mathbb{P}(V)$ (a non confondere con $V(F) \subset V$). Per esempio se F è omogenea di grado 1, cioè una funzione lineare, allora $\mathbf{V}(F) = \mathbb{P}(\ker F)$. Per gli stessi motivi che inducono a definire una ipersuperficie affine in $\mathbb{T}$ come una classe di proporzionalità di funzione polinomiale su $\mathbb{T}$

Definizione 10.1.12. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una *ipersuperficie* in $\mathbb{P}(V)$ è una funzione polinomiale omogenea $F\colon V \to \mathbb{K}$ di grado strettamente positivo, presa a meno di moltiplicazione per un elemento non nullo di $\mathbb{K}$, e si denota $[F]$. Il *supporto* di $[F]$ è l'insieme degli zeri $\mathbf{V}(F)$. Il *grado* di $[F]$ è il grado di F.

Osservazione 10.1.13. L'insieme delle funzioni polinomiali omogenee $F\colon V \to \mathbb{K}$ di grado d è un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni polinomiali su V e si denota $\mathrm{Sym}^d V^\vee$. La scelta di una base $\{X_0, \ldots, X_n\}$ di $V^\vee$ identifica $\mathrm{Sym}^d V^\vee$ con $\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]_d$. L'insieme delle ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}(V)$ è naturalmente identificato con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V^\vee)$.

Esempio 10.1.14. Associando a una $F \in V^\vee$ non nulla l'insieme degli zeri $\mathbf{V}(F) = \mathbb{P}(\ker F)$ si identifica lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^\vee)$ delle ipersuperfici proiettive di grado 1 in $\mathbb{P}(V)$ con lo spazio duale $\mathbb{P}(V)^\vee$.

10.1.3 Relazioni tra ipersuperfici affini e proiettive

Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di codimensione 1, quindi $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ è in modo naturale uno spazio affine su $\mathbb{K}$ della stessa dimensione di $\mathbb{P}(V)$. Mostreremo che una ipersuperficie (proiettiva) $[F]$ di grado d in $\mathbb{P}(V)$ determina una ipersuperficie (affine) in $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$. Sia $L\colon V \to \mathbb{K}$ un'applicazione lineare tale che $\ker L = W$, cioè un'equazione cartesiana di W - ricordiamo che denotiamo $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ anche $\mathbb{P}(V)_L$. Siano $v \in (V \setminus W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}^*$: siccome F è omogenea di grado d abbiamo

$$\frac{F(\lambda v)}{L(\lambda v)^d} = \frac{\lambda^d F(v)}{\lambda^d L(v)^d} = \frac{F(v)}{L(v)^d}.$$

Quindi la restrizione di F/L^d a $(V \setminus W)$ definisce un'applicazione $F_L \colon \mathbb{P}(V)_L \to \mathbb{K}$.

Lemma 10.1.15. *Mantenendo le notazioni appena introdotte, l'applicazione F_L è polinomiale di grado al più il grado di F. Si ha $\deg F_L < \deg F$ se e solo se $\mathbf{V}(L) \subset \mathbf{V}(F)$.*

Dimostrazione. Scegliamo coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_n$ su $\mathbb{P}(V)$ tali che $X_0 = L$. Quindi $x_i := X_i/X_0$ per $i = 1, \ldots, n$ sono coordinate affini su $\mathbb{P}(V)_L$. Nelle coordinate scelte abbiamo

$$F = G_d + G_{d-1}X_0 + \ldots + G_0 X_0^d, \qquad G_i \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]_i, \quad 0 \le i \le d.$$

Poniamo $g_i := G_i(x_1, \ldots, x_n)$. Allora (nelle coordinate scelte)

$$F_L = g_d + g_{d-1} + \ldots + g_0, \qquad g_i \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]_i, \quad 0 \le i \le d.$$

Segue che F_L è polinomiale di grado al più il grado di F. Inoltre vediamo che $\deg F_L < \deg F$ se e solo se $g_d = 0$, ovvero $G_d = 0$, e questo equivale a $\mathbf{V}(X_0) \subset \mathbf{V}(F)$. $\square$

Se $\deg F_L$ allora F_L determina una ipersuperficie di $\mathbb{P}(V)_L$, che non dipende nè dal rappresentante F nè dalla scelta di L: diciamo che $[F_L]$ è la *restrizione di* $[F]$ a $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$. Notiamo che

$$\mathbf{V}(F) \cap (\mathbb{P}(V)_L) = V(F_L). \tag{10.1.9}$$

Esiste un inverso parziale di questa procedura. Sia $\pi \colon (V \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbb{P}(V)$ l'applicazione quoziente. Data una $f \colon \mathbb{P}(V)_L \to \mathbb{K}$ polinomiale di grado d possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (V \setminus \ker L) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & L(v)^d f(\pi(v)) \end{array}$$

Scegliendo un sistema di coordinate omogenee di $\mathbb{P}(V)$ come nella dimostrazione del **Lemma 10.1.15** si vede che φ è la restrizione di un (unico) polinomio omogeneo $F \colon V \to \mathbb{K}$ di grado d, e che $F_L = f$. Diciamo che $[F]$ è la *chiusura* di $[f]$.

10.2 Ipersuperfici affini

10.2.1 Componenti irriducibili

In questa sottosezione supporremo che il campo $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso (per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Con questa ipotesi associeremo a una ipersuperficie in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un oggetto geometrico. Generalizzeremo la decomposizione di un polinomio di grado strettamente positivo $f \in \mathbb{K}[x]$ in prodotto di fattori lineari:

$$f = c(x - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{m_r}, \qquad c \in \mathbb{K}^*, \quad a_i \neq a_j \text{ se } 1 \le i < j \le r, \quad m_i > 0 \text{ se } 1 \le i \le r.$$

È chiaro che l'ipersuperficie $[f]$ è determinata dall'insieme dei suoi zeri *contati con le loro molteplicità* che possiamo denotare $(m_1 a_1 + \ldots m_r a_r)$. Cominceremo definendo l'analogo in dimensione arbitraria dell'espressione $(m_1 a_1 + \ldots m_r a_r)$. Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$, di dimensione n: per l'**Osservazione 10.1.8** l'anello $\mathbb{K}[\mathbb{T}]$ delle funzioni polinomiali su $\mathbb{T}$ è isomorfo all'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e perciò è a fattorizzazione unica.

Definizione 10.2.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Un *divisore primo* di $\mathbb{T}$ è l'insieme degli zeri $V(f)$ di un polinomio *primo* $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}$. Il *gruppo dei divisori* di $\mathbb{T}$ è il gruppo abeliano libero generato dai divisori primi di $\mathbb{T}$, e si denota $\mathrm{Div}(\mathbb{T})$.

Osservazione 10.2.2. Siano $f, g \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ polinomi primi. Se $[f] = [g]$ allora $V(f) = V(g)$. Non è affatto ovvio che valga il viceversa, cioè che se $V(f) = V(g)$ allora $[f] = [g]$. Questa sottosezione è principalmente dedicata alla dimostrazione che vale questo risultato sotto l'ipotesi che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso, vedi **Proposizione 10.2.8**.

Quindi un elemento di $\mathrm{Div}(\mathbb{T})$ è una somma *formale* $m_1 V(f_1) + \ldots + m_r V(f_r)$ dove ciascun f_i è un polinomio primo su $\mathbb{T}$ e gli insiemi $V(f_1), \ldots, V(f_r)$ sono distinti (includiamo il caso in cui si somma sull'insieme vuoto: il divisore corrispondente si denota 0), e la somma è definita formalmente (l'elemento nullo è il divisore 0). Gli elementi di $\mathrm{Div}(\mathbb{T})$ sono i *divisori di* $\mathbb{T}$.

Definizione 10.2.3. Siano $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Se $[f]$ è una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e $f = c \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_s$ è una decomposizione di f in prodotto di una unità $c \in \mathbb{K}^*$ e primi $f_1, \ldots, f_s$, il *divisore di* $[f]$, denotato $\mathrm{div}(f)$ è il divisore di $\mathbb{T}$ dato da

$$\mathrm{div}(f) := V(f_1) + \ldots + V(f_s). \tag{10.2.1}$$

(L'unicità della decomposizione in fattori primi assicura che la definizione è ben posta.)

Un divisore $(m_1 V(f_1) + \ldots + m_r V(f_r)) \in \mathrm{Div}(\mathbb{T})$ è *effettivo* se $m_i > 0$ per $i = 1, \ldots, r$ (il divisore 0 è effettivo). Notate che il divisore associato a una ipersuperficie è effettivo. Dimostreremo che ipersuperfici $[f]$ e $[g]$ in $\mathbb{T}$ sono uguali solo se i divisori associati $\mathrm{div}(f)$ e $\mathrm{div}(g)$ sono uguali. Quello che va dimostrato è che se $f, g \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ sono primi allora $V(f) = V(g)$ solo se f e g sono associati. Cominciamo con un risultato semplice ma utile.

Proposizione 10.2.4. *Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine n-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$ di cardinalità infinita (ma non supponiamo che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso) e $f \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ di grado $d \geq 0$. Esiste un sistema di coordinate $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tale che*

$$f \circ X^{-1} = u_0 x_n^d + g_1 x_n^{d-1} + \ldots + g_d, \qquad u_0 \in \mathbb{K}^*, \quad g_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]. \tag{10.2.2}$$

Dimostrazione. Sia $Y \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate affini su $\mathbb{T}$ e scriviamo

$$f \circ Y^{-1} = f_d + f_{d-1} + \ldots + f_0, \qquad f_i \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]_i. \tag{10.2.3}$$

Il polinomio f_d non è nullo, siccome $\mathbb{K}$ è infinito esiste $\mathbf{0} \neq (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che $f(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \neq 0$. Sia $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $A \cdot (0, 0, \ldots, 0, 1)^t = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)^t$ e sia $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ il sistema di coordinate affini su $\mathbb{T}$ per cui la formula del cambiamento di coordinate è $Y = A \cdot X$. Sostituendo $A \cdot X$ a Y nella (10.2.3) vediamo che

$$f \circ X^{-1} = f_d(A \cdot X) + h, \qquad \deg h < d. \tag{10.2.4}$$

Sviluppiamo il polinomio $f_d(A \cdot X) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d$ come polinomio nella x_n a coefficienti polinomi in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$:

$$f_d(A \cdot X) = u_0 x_n^d + u_1 x_n^{d-1} + \ldots + u_d, \qquad u_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]_i.$$

Siccome $f_d(A \cdot (0, 0, \ldots, 0, 1)^t) = f_d((\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)^t) \neq 0$ vediamo che $u_0 \in \mathbb{K}^*$ e la proposizione segue dalla (10.2.4). □

Corollario 10.2.5. *Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine n-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$ di cardinalità infinita e algebricamente chiuso. Siano $[f]$ una ipersuperficice di $\mathbb{T}$ e X un sistema di coordinate su $\mathbb{T}$ tale che valga* (10.2.2). *Allora la proiezione*

$$\begin{array}{ccc} V(f) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{K}} \\ p & \mapsto & (x_1(p), \ldots, x_{n-1}(p)) \end{array}$$

è suriettiva.

Dimostrazione. Sia $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{K}}$: allora $(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) \in \pi^{-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ se e solo se

$$u_0 x_n^d + g_1(a_1, \ldots, a_{n-1}) x_n^{d-1} + \ldots + g_d(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0. \tag{10.2.5}$$

Siccome $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso l'equazione polinomiale (10.2.5) (nella x_n) ha almeno una soluzione e quindi $\pi^{-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ non è vuoto. □

Ricordiamo che se $\mathbb{T}$ è uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ allora l'anello $\mathbb{K}[\mathbb{T}]$ è isomorfo a $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ dove n è la dimensione di $\mathbb{T}$, vedi l'**Osservazione 10.1.8**, e quindi $\mathbb{K}[\mathbb{T}]$ è un dominio a fattorizzazione unica.

Proposizione 10.2.6. *Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine n-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $f \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ primo. Un polinomio $g \in \mathbb{K}[T]$ si annulla su $V(f)$ se e solo se è un multiplo di f.*

Dimostrazione. Se g è un multiplo di f è chiaro che si annula su $V(f)$. Per dimostrare il viceversa supponiamo che g si annulli su $V(f)$ ma che non sia un multiplo di f: arriveremo a una contraddizione. Sia X un sistema di coordinate su $\mathbb{T}$ tale che valga (10.2.2). Siano $\phi := f \circ X^{-1}$ e $\psi := g \circ X^{-1}$. Siccome f è primo lo è anche ϕ, e siccome g non è un multiplo di f anche ψ non è un multiplo di ϕ. Sia $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ il campo dei quozienti di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, cioè il campo delle funzioni razionali nelle trascendenti $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Consideriamo ϕ e ψ come elementi di $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n]$. Per il **Lemma 10.1.2** ϕ è primo in $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n]$ e non divide ψ nemmeno in $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n]$, e siccome l'anello $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n]$ è a ideali principali esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n]$ tali che

$$\alpha \cdot \phi + \beta \cdot \psi = 1.$$

Moltiplicando ambo i membri per un denominatore comune di α e β (cioè $0 \neq \gamma \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ tale che $\gamma \cdot \alpha \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e $\gamma \cdot \beta \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$) otteniamo che

$$\gamma \cdot \alpha \cdot \phi + \gamma \cdot \beta \cdot \psi = \gamma.$$

Segue che se $0 = \phi(a_1, \ldots, a_n) = \psi(a_1, \ldots, a_n)$ allora $\gamma(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$. Siccome $\gamma \neq 0$ esiste $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tale che $\gamma(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ e questo contraddice il **Corollario 10.2.5**. □

Corollario 10.2.7. *Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine n-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $f \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ primo. Siano $\phi, \psi \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ primi e tali che $V(\phi) = V(\psi)$: allora ϕ e ψ sono associati.*

Il seguente risultato dà l'annunciata interpretazione geometrica di ipersuperficie affine su un campo algebricamente chiuso.

Proposizione 10.2.8. *Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Se $[f]$ e $[g]$ sono ipersuperfici di $\mathbb{T}$ allora $[f] = [g]$ se e solo se i divisori associati* $\mathrm{div}(f)$ *e* $\mathrm{div}(g)$ *sono uguali.*

Dimostrazione. Se $[f] = [g]$ i polinomi f e g sono associati, quindi i loro fattori primi sono gli stessi e hanno le stesse molteplicità: ne segue che $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$. Ora dimostriamo il viceversa: supponiamo che $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ e mostriamo che $[f] = [g]$. Siano

$$f = u \cdot \prod_{i=1}^{r} f_i^{m_i}, \qquad g = v \cdot \prod_{j=1}^{s} g_j^{n_j}$$

le decomposizioni in prodotto di unità (u e v) e fattori primi, con f_{i_1} *non* associato a f_{i_2} se $i_1 \neq i_2$ e similmente per g. Per ipotesi

$$\sum_{i=1}^{r} m_i V(f_i) = \mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g) = \sum_{j=1}^{s} n_j V(g_j). \tag{10.2.6}$$

La proposizione segue subito dal **Corollario 10.2.7** e dall'uguaglianza (10.2.6). □

Osservazione 10.2.9. Siano $\mathbb{T}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e scriviamo $\mathrm{div}(f) = m_1 D_1 + \ldots + m_r D_r$ dove i D_i sono divisori primi distinti. Segue dalla **Proposizione 10.2.6** che $D_1, \ldots, D_r$ sono univocamente determinati a meno dell'ordine da $V(f)$: sono le *componenti irriducibili* di $[f]$ (o di $V(f)$). La *molteplicità* della componente D_i è data da m_i.

10.2.2 Punti lisci e singolari

In quest sottosezione *non* assumiamo che il campo $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Siano $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ e $p \in \mathbb{T}$. Sia $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate *centrato* in p cioè tale che $X(p) = \mathbf{0}$. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e scriviamo

$$f \circ X^{-1} = \phi_d + \phi_{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}, \qquad \phi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i, \quad \phi_d \neq 0. \tag{10.2.7}$$

(Attenzione: del definire il grado di f si richiede che il polinomio omogeneo ϕ_{d+e} sia non nullo, qui richiediamo che ϕ_d sia non nullo.) Notiamo che $p \in V(f)$ se e solo se $d > 0$, e quindi se $d > 0$ in un sistema di coordinate centrato in p allora $d > 0$ in ogni altro sistema di coordinate centrato in p.

Proposizione 10.2.10. *Mantenendo la notazione appena introdotta, supponiamo che $Y \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sia un altro sistema di coordinate* centrato *in p e scriviamo*

$$f \circ Y^{-1} = \psi_{d'} + \psi_{d'+1} + \ldots + \psi_{d'+e'}, \qquad \psi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i, \quad \psi_{d'} \neq 0.$$

Allora $d = d'$.

Dimostrazione. Siccome $\mathbf{0} = X(p) = Y(p)$ esiste $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che la matrice del cambiamento di base sia $X = A \cdot Y$, e quindi

$$f \circ Y^{-1} = f \circ X^{-1}(A \cdot Y) = \phi_d(A \cdot Y) + \phi_{d+1}(A \cdot Y) + \ldots + \phi_{d+e}(A \cdot Y).$$

Siccome $\phi_i(A \cdot Y) \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]_i$ e $\phi_i(A \cdot Y) = 0$ solo se $\phi_i = 0$ segue la proposizione. □

La **Proposizione 10.2.10** permette di dare la seguente definizione.

Definizione 10.2.11. Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e $p \in \mathbb{T}$. La *molteplicità di* $[f]$ in p è data dal numero naturale d tale che valga (10.2.7) per un sistema di coordinate affini *centrato* in p: la denotiamo $\mathrm{mult}_p([f])$. (Osservate che se moltiplichiamo f per $\lambda \in \mathbb{K}^*$ allora le ϕ_i di (10.2.7) vengono sostituite da $\lambda\phi_i$ e quindi d *non* dipende dal rappresentante della classe di equivalenza $[f]$.) La $[f]$ è *liscia in* p se $\mathrm{mult}_p([f]) = 1$, è *singolare in* p se $\mathrm{mult}_p([f]) > 1$ (abbiamo già notato che

Osservazione 10.2.12. Sia $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un arbitrario sistema di coordinate affini su $\mathbb{T}$ e $(a_1, \ldots, a_n) = X(p)$. Allora

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \\ p & \mapsto & (x_1(p) - a_1, \ldots, x_n(p) - a_n) \end{array}$$

è un sistema di coordinate affini su $\mathbb{T}$ centrato in p. Possiamo scrivere

$$f \circ X^{-1} = \phi_d + \phi_{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}, \qquad \phi_i \in \mathbb{K}[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]_i, \quad \phi_d \neq 0, \tag{10.2.8}$$

cioè lo sviluppo di Taylor (algebrico) di $f \circ X^{-1}$ vicino $(a_1, \ldots, a_n)$. Allora $\mathrm{mult}_p([f]) = d$.

Ricordiamo che $\mathrm{mult}_p([f]) > 0$ equivale a $p \in V(f)$.

Definizione 10.2.13. Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Sia $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e $p \in V(f)$. La $[f]$ è *liscia in* p (equivalentemente p è un punto liscio di $[f]$) se $\mathrm{mult}_p([f]) = 1$, è *singolare in* p se $\mathrm{mult}_p([f]) > 1$ (equivalentemente p è un punto singolare di $[f]$).

10.2.3 Derivate formali

Un modo conveniente di determinare i punti lisci/singolari di una ipesuperficie $[f]$ è di calcolare le derivate parziali di f. Se il campo $\mathbb{K}$ non è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ le derivate parziali non sono definite come il limite di rapporti incrementali (ma vedi l'**Esercizio 10.5** per una versione algebrica della definizione con i rapporti incrementali), bensì formalmente. Ricordiamo che se $I = (i_1, \ldots, i_n)$ è un n-multi-indice, quindi $i_k \in \mathbb{N}$ per $1 \leq k \leq n$, poniamo $x^I := x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, e che un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si scrive in modo unico come $f = \sum_I a_I x^I$ dove la somma è su tutti gli n-multi-indici, $a_I \in \mathbb{K}$ e $a_I = 0$ per quasi tutti gli I (cioè tutti al di fuori di un insieme finito). Denotiamo e_s il multi-indice $(\delta_{1s}, \ldots, \delta_{ks}, \ldots, \delta_{ns})$. Per $1 \le s \le n$ *definiamo* la derivata parziale $\partial/\partial x_s$ come l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \xrightarrow{\partial/\partial x_s} & \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \\ \sum_I a_I x^I & \mapsto & \sum_I i_s a_I x^{(I-e_s)} \end{array} \tag{10.2.9}$$

(Se $i_s = 0$ si intende che $i_s a_I x^{(I-e_s)}$ è uguale a 0 anche se il monomio $x^{(I-e_s)}$ non è definito.) Come d'abitudine denotiamo $\partial/\partial x_s(f)$ con $\partial f/\partial x_s$.

Proposizione 10.2.14. *L'applicazione $\partial/\partial x_s$ definita da* (10.2.9) *ha le seguenti proprietà:*

1. $\partial f/\partial x_s = 0$ *se* $f \in \mathbb{K}$,
2. $\partial(f+g)/\partial x_s = \partial f/\partial x_s + \partial g/\partial x_s$ *per* $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *e*
3. $\partial(f \cdot g)/\partial x_s = (\partial f/\partial x_s) \cdot g + f \cdot (\partial g/\partial x_s)$ *per* $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. *(Vale la regola di Leibniz.)*

Dimostrazione. La (1) e la (2) seguono immediatamente dalla definizione. Per verificare la (3) osserviamo che per (2) è sufficiente verificare la regola di Leibniz per il prodotto di due monomi: lasciamo la facile verifica al lettore. □

Notiamo che (1) e (2) danno che (10.2.9) è un'endomorfismo del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposizione 10.2.15. *Siano $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ e $p \in V(f)$. Sia $X \colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate e $X(p) = (a_1, \ldots, a_n)$. Una ipersuperficie $[f]$ di $\mathbb{T}$* è liscia in p *se e solo se* $p \in V(f)$ *ed esiste* $1 \le i \le n$ *tale che* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \ne 0$.

Dimostrazione. Segue dall'**Osservazione 10.2.12**. Infatti supponiamo che $p \in V(f)$ (se $p \notin V(f)$ allora $[f]$ non è liscia in p), scriviamo (10.2.8), calcoliamo le derivate parziali di $f \circ X^{-1}$ e valutiamole in $(a_1, \ldots, a_n)$: sono tutte nulle se e solo se $d > 1$ e questo dimostra la proposizione. □

10.2.4 Molteplicità d'intersezione di una retta e una ipersuperficie

Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$. Siano $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e $L \subset \mathbb{T}$ un sottospazio affine. La restrizione di $f|L$ è una funzione polinomiale e quindi se non è costante definisce un'ipersuperficie di L. Siccome $(\lambda f)|_L = \lambda(f|_L)$ abbiamo una ben definita ipersuperficie $[f]|_L$ rappresentata da $f|_L$, che chiamiamo la *restrizione di* $[f]$ a L. Ora supponiamo che $p \in V(f)$ e che L sia una retta contenete p. Siccome $f(p) = 0$ abbiamo due possibilità: $f|_L = 0$ (cioè $L \subset V(f)$) oppure è definita la restrizione $[f]|_L$.

Definizione 10.2.16. Con la notazione appena introdotta, la *molteplicità d'intersezione* di $[f]$ e L in p è data da

$$\mathrm{mult}_p([f] \cdot L) := \begin{cases} \infty & \text{se } L \subset V(f), \\ \mathrm{mult}_p([f]|_L) & \text{se } L \not\subset V(f) \end{cases}$$

Se $p \notin V(f) \cap L$ poniamo $\mathrm{mult}_p([f] \cdot L) := 0$.

Il seguente risultato mette in relazione la molteplicità di un punto p di una ipersuperficie con la molteplicità d'intersezione in p di quella ipersuperficie con una retta generica contenente p.

Proposizione 10.2.17. *Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$ (non necessariamente algebricamente chiuso). Siano $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e $p \in V(f)$. Sia $L \subset \mathbb{T}$ una retta contente p. Allora*

$$\mathrm{mult}_p([f] \cdot L) \ge \mathrm{mult}_p([f]) \tag{10.2.10}$$

ed esistono rette L contenenti p tali che (10.2.10) *sia un'uguaglianza.*

Dimostrazione. Siano $d := \mathrm{mult}_p([f])$ e $X\colon \mathbb{T} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sistema di coordinate affini centrate in p. Allora

$$f \circ X^{-1} = \phi_d + \phi_{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}, \qquad \phi_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_i, \quad \phi_d \neq 0.$$

Abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}} & \xrightarrow{R} & \{L \subset \mathbb{T} \mid L \text{ retta}, \, p \in L\} \\ [v] & \mapsto & \langle p, X^{-1}(v) \rangle \end{array}$$

(L'applicazione μ associa a v la retta per l'origine con giacitura generata da v.) Abbiamo la coordinata t sulla retta $R([v])$ definita da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} & \xrightarrow{\sim} & R(v) \\ t & \mapsto & X^{-1}(tv) \end{array}$$

Notate che la coordinata t di p è 0. Abbiamo

$$f \circ X^{-1}|_{R(v)} = \phi_d(v_1, \ldots, v_n)t^d + \phi_{d+1}(v_1, \ldots, v_n)t^{d+1} + \ldots + \phi_{d+e}(v_1, \ldots, v_n)t^{d+e} \in \mathbb{K}[t]. \quad (10.2.11)$$

Segue che $\mathrm{mult}_p([f] \cdot L) \geq d$. Siccome $\phi_d \neq 0$ e il campo $\mathbb{K}$ è indinito esistono $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ tali che $\phi_d(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$; per tali $[v]$ si ha che $\mathrm{mult}_p([f] \cdot L) = d$. □

10.2.5 Spazio tangente

Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$.

Definizione 10.2.18. Siano $[f]$ una ipersuperficie di $\mathbb{T}$ e $p \in V(f)$. Lo *spazio tangente a* $[f]$ *in* p è l'unione delle rette $L \subset \mathbb{T}$ contenenti p tali che $\mathrm{mult}_p([f] \cdot L) > 1$, e si denota $T_p([f])$.

Proposizione 10.2.19. *Siano* $[f]$ *una ipersuperficie di* $\mathbb{T}$ *e* $p \in V(f)$. *Sia* $X\colon \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *un sistema di coordinate affini su* $\mathbb{T}$ *e* $X(p) = a = (a_1, \ldots, a_n)$. *Lo spazio tangente a* $[f]$ *in* p *ha equazione cartesiana*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) = 0.$$

Dimostrazione. Se $a = \mathbf{0}$, cioè le coordinate X sono centrate in p, segue subito da (10.2.11). In generale sostituiamo alle coordinate X le coordinate $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ che sono centrate in p. □

In particolare la **Proposizione 10.2.19** dà che se $[f]$ è liscia in p allora $T_p([f])$ è un iperpiano, se $[f]$ è singolare in p allora $T_p([f]) = \mathbb{T}$.

10.3 Ipersuperfici proiettive

10.4 Quadriche

10.5 Curve

10.5.1 Risultante di due polinomi

10.5.2 Teorema di Bézout

Esercizi del Capitolo 10

Esercizio 10.1. *Dimostrate che*

$$\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d = \binom{n-1+d}{d}.$$

(Suggerimento: definite la serie formale

$$\varphi_n := \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d) t^d$$

e dimostrate che $\varphi_{a+b} = \varphi_a \cdot \varphi_b$. Poi calcolate φ_1, e da qui φ_n grazie al punto precedente.)

Esercizio 10.2. *Sia $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e poniamo*

$$f := (x_n^2 + g) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]. \tag{10.5.1}$$

Dimostrate che f è primo se solo se $(-g)$ non è un quadrato. Determinate se $f := x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ è primo (la risposta dipende dalla caratteristica di $\mathbb{K}$).

Esercizio 10.3. *Sia $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e poniamo*

$$f := (x_n^p + g) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

dove p è un numero primo. Dimostrate che f è primo se solo se g non è la potenza p-esima di un polinomio. (Suggerimento. L'applicazione $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}/p} x_n)$ fissa il polinomio f: dedurre che se f non è primo allora è prodotto di fattori di grado 1 nella x_n.)

Esercizio 10.4. *Sia $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ di grado strettamente positivo e poniamo*

$$f := (x_n^2 + g) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]. \tag{10.5.2}$$

Dimostrate che se $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ allora l'ipersuperficie $[f]$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è liscia se e solo se lo è l'ipersuperficie $[g]$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Esercizio 10.5. *Definiamo*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}$$

nel seguente modo: $\frac{d}{dt}|_{t=0} = c$ se e solo se

$$(f - f(0) - ct) \in (t^2).$$

Poniamo $\frac{df(0)}{dt} := \frac{d}{dt}|_{t=0}(f)$. Dimostrate (direttamente) che $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ è lineare e che vale la regola di Leibniz

$$\frac{d(f \cdot g)(0)}{dt} = \frac{df(0)}{dt} \cdot g(0) + f(0) \cdot \frac{dg(0)}{dt}.$$

Sia $\mathbb{T}$ uno spazio affine su $\mathbb{K}$, con spazio vettoriale associato V. Sia $RA(O; \mathcal{B})$ un sistema di riferimento affine su $\mathbb{T}$, con coordinate affini $(x_1, \ldots, x_n)$. Se $f \in \mathbb{K}[\mathbb{T}]$ allora l'isomorfismo $X : \mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ permette di dare senso alle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, sono funzioni polinomiali su $\mathbb{T}$, e quindi al loro valore $\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}$ per un punto $p \in \mathbb{T}$. Sia $v \in V$ e siano $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ le sue coordinate nella base $\mathcal{B}$: dimostrate che

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + tv).$$

Esercizio 10.6. *Sia $\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3. Siano $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbf{P}$ rette a due a due sghembe. Dimostrate che l'unione delle rette R incidenti L_1, L_2 e L_3 è il supporto di una quadrica liscia.*