

# Capitolo 9

## Spazi proiettivi

Sia  $\mathbb{A}$  un piano affine. Due rette distinte  $L, M \subset \mathbb{A}$  si intersecano in un punto oppure sono disgiunte. Più precisamente le rette si intersecano in un punto se sono scelte genericamente, e sono disgiunte (cioè parallele) per scelte particolari. A partire da  $\mathbb{A}$  si può costruire in modo naturale un piano *proiettivo* aggiungendo i punti *all'infinito* di intersezione di rette parallele. Nel caso in cui  $\mathbb{A}$  sia un piano affine *reale* si può dare un senso intuitivo a questa frase nel seguente modo. Consideriamo rette parallele  $L, M$ , un punto  $p \in L$  e, per ogni punto  $t \in M$  la retta  $R_t := \langle p, t \rangle$  contenente  $p$  e  $t$ . Scegliendo coordinate affini su  $M$  possiamo pensare che  $t$  sia un numero reale. Ora consideriamo valori di  $t$  sempre più grandi, cioè facciamo tendere  $t$  all'infinito. Siccome per  $t \rightarrow \infty$  la retta  $R_t$  si avvicina sempre più alla retta  $L$ , e d'altra parte  $R_t$  incontra  $M$  nel punto  $t$ , vediamo che scappando verso l'infinito lungo la retta  $L$  andiamo verso il “punto d'intersezione” tra  $L$  e  $M$  (attenzione: ci si avvicina allo stesso punto all'infinito sia che si percorra  $L$  in una direzione o in quella opposta). Questo diventa ancora più chiaro se proiettiamo da un punto fissato un piano orizzontale su un altro piano (non parallelo), come quando un pittore dipinge un quadro rispettando le regole della prospettiva: l'orizzonte, cioè l'insieme dei punti all'infinito del piano orizzontale, viene proiettato (disegnato) su una retta ordinaria  $H$  e rette sul piano orizzontale che sono parallele vengono proiettate su rette che si intersecano in un punto di  $H$ . Riassumendo: ogni retta di  $\mathbb{A}$  determina un punto *all'infinito* del piano proiettivo contenente  $\mathbb{A}$  e due tali punti sono uguali se e solo se sono i punti all'infinito di rette parallele. La definizione di spazio proiettivo che daremo sarà lontana dalle considerazioni intuitive che abbiamo appena fatto: più oltre stabiliremo il contatto con la discussione appena fatta. Nel presente capitolo  $\mathbb{K}$  sarà un campo e gli spazi vettoriali saranno sempre finitamente generati.

### 9.1 Definizioni

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Lo *spazio proiettivo associato a  $V$* , o *proiettivizzato di  $V$*  è l'insieme dei sottospazi vettoriali  $L \subset V$  di dimensione 1, e si denota  $\mathbb{P}(V)$ . Uno *spazio proiettivo su  $\mathbb{K}$*  è la proiettivizzazione di uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Gli elementi di  $\mathbb{P}(V)$  si dicono *punti*. Dato un vettore *non nullo*  $v \in V$  il sottospazio generato da  $v$  è un elemento di  $\mathbb{P}(V)$ : per adeguarci alla tradizione denoteremo il sottospazio  $\langle v \rangle$  con  $[v]$ . Siccome ogni sottospazio 1-dimensionale di  $V$  è generato da un vettore non nullo, ogni elemento di  $\mathbb{P}(V)$  è dato da  $[v]$  per qualche  $v \in (V \setminus \{0\})$ . Siano  $v, w \in (V \setminus \{0\})$ : allora  $[v] = [w]$  se e solo se esiste  $\mu \in \mathbb{K}^*$  (ricordiamo che  $\mathbb{K}^* = (\mathbb{K} \setminus \{0\})$ ) tale che  $v = \mu w$ . Quindi  $\mathbb{P}(V)$  è naturalmente identificato con lo spazio quoziente di  $(V \setminus \{0\})$  per la relazione di equivalenza  $\sim$  definita dalla condizione che  $v \sim w$  se esiste  $\mu \in \mathbb{K}^*$  tale che  $v = \mu w$ .

*Esempio 9.1.1.* Se  $V = \{0\}$  allora  $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ . Se  $\dim V = 1$  allora  $\mathbb{P}(V)$  è il singolo punto  $V$ .

**Definizione 9.1.2.** La *dimensione* dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  è data

$$\dim \mathbb{P}(V) := (\dim V - 1). \quad (9.1.0.1)$$

Una *retta proiettiva* è uno spazio proiettivo di dimensione 1, un *piano proiettivo* è uno spazio proiettivo di dimensione 2.

La definizione appena data di dimensione è sicuramente giustificata nel caso in cui  $\dim V \leq 1$  - vedi l'**Esempio 9.1.1**. Nel seguito giustificheremo l'**Esempio 9.1.1** in generale.

**Definizione 9.1.3.** Lo spazio proiettivo *numerico*  $n$ -dimensionale su  $\mathbb{K}$  è  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$  e viene denotato  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ . I suoi punti vengono denotati  $[X_0, \dots, X_n]$  (anzichè  $[(X_1, \dots, X_{n+1})]$ ).

*Esempio 9.1.4.* 1. La retta proiettiva numerica  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  è l'unione disgiunta

$$\{[1, x] \mid x \in \mathbb{K}\} \sqcup \{[0, 1]\}. \quad (9.1.0.2)$$

Il punto  $[0, 1]$  si denota tradizionalmente  $\infty$  e quindi abbiamo l'identificazione di  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  con  $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ . La notazione è motivata dal caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : se  $x \mapsto \infty$  il punto  $[1, x]$  si avvicina a  $[0, 1]$  perchè  $[1, x] = [x^{-1}, 1]$ . La corrispondenza è data da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 & \longrightarrow & \mathbb{K} \sqcup \{\infty\} \\ [X_0, X_1] & \mapsto & X_0/X_1 \end{array} \quad (9.1.0.3)$$

dove per convenzione  $a/0 = \infty$  per  $a \neq 0$ .

2. Il piano proiettivo numerico  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  è l'unione disgiunta

$$\{[1, x, y] \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2\} \sqcup \{[0, 1, y] \mid y \in \mathbb{K}\} \sqcup \{[0, 0, 1]\}. \quad (9.1.0.4)$$

In entrambi gli esempi "quasi tutti" i punti dello spazio proiettivo appartengono a un sottoinsieme che possiamo identificare con uno spazio affine; svilupperemo questo punto di vista nella **Sezione 9.2**.

I sottospazi vettoriali di  $V$  definiscono (per proiettivizzazione) i sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ .

**Definizione 9.1.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{P}(V)$  è un *sottospazio proiettivo* o *sottospazio lineare* se esiste un sottospazio vettoriale  $W \subset V$  tale che  $A = \mathbb{P}(W)$ . La *codimensione* di  $A$  in  $\mathbb{P}(V)$  è uguale a  $(\dim \mathbb{P}(V) - \dim A)$ . Diciamo che  $A$  è una *retta* se  $\dim A = 1$ , che è un *piano* se  $\dim A = 2$ , e che è un *iperpiano* se  $\dim A = (\dim \mathbb{P}(V) - 1)$  (cioè se  $\dim W = (\dim V - 1)$ ).

*Osservazione 9.1.6.* Dalle proprietà della dimensione di spazi vettoriali segue che se  $A \subsetneq \mathbb{P}(V)$  è un sottospazio proiettivo allora  $\dim A < \dim \mathbb{P}(V)$ .

*Esempio 9.1.7.* Sia  $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  un sottospazio proiettivo. Per definizione esiste un sottospazio vettoriale  $W \subset \mathbb{K}^{n+1}$  tale che  $L = \mathbb{P}(W)$ . Siano

$$0 = F_1(X_0, \dots, X_n) = F_2(X_0, \dots, X_n) = \dots = F_r(X_0, \dots, X_n) \quad (9.1.0.5)$$

equazioni cartesiane di  $W$ , cioè  $(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  appartiene a  $W$  se e solo se valgono le equazioni (9.1.0.5). Notate che

$$r \geq \text{cod}(W, \mathbb{K}^{n+1}) = \text{cod}(L, \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n) \quad (9.1.0.6)$$

e che possiamo scegliere  $F_1, \dots, F_r$  con  $r = \text{cod}(L, \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$ . Le (9.1.0.5) si dicono *equazioni cartesiane omogenee* di  $L$ : quindi  $[X_0, \dots, X_n] \in L$  se e solo se valgono le equazioni (9.1.0.5). A questo proposito va notato che valgono le (9.1.0.5) per  $(X_0, \dots, X_n)$  se e solo se valgono le (9.1.0.5) con  $(X_0, \dots, X_n)$  sostituito da  $(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n)$  dove  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  - questo perchè le  $F_i$  sono funzioni lineari.

**Proposizione 9.1.8.** Sia  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio proiettivo e  $L_i \subset \mathbb{P}(V)$  una collezione di sottospazi proiettivi, dove  $i$  appartiene a un insieme di indici  $I$ . L'intersezione  $\bigcap_{i \in I} L_i$  è un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $i \in I$ : per ipotesi esiste un sottospazio vettoriale  $W_i \subset V$  tale che  $L_i = \mathbb{P}(W_i)$ . Si ha che

$$\bigcap_{i \in I} L_i = \bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right). \quad (9.1.0.7)$$

Siccome l'intersezione dei sottospazi vettoriali  $W_i$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  segue la Proposizione.  $\square$

*Osservazione 9.1.9.* Sia  $A$  sottoinsieme di  $\mathbb{P}(V)$ . Dalla **Proposizione 9.1.8** segue che l'intersezione di tutti i sottospazi lineari contenenti  $A$  è il minimo sottospazio lineare  $L \subset \mathbb{P}(V)$  contenente  $A$  (cioè è contenuto in ogni sottospazio lineare contenente  $A$ ). Diciamo che questo sottospazio è *generato da*  $A$  e lo denotiamo con  $\langle A \rangle$ . Se  $A$  non è vuoto lo spazio  $\langle A \rangle$  è lo spazio proiettivo associato al sottospazio di  $V$  generato dai vettori  $v \neq 0$  tali che  $[v] \in A$ :

$$\langle A \rangle = \mathbb{P}(\langle \{v \in (V \setminus \{0\}) \mid [v] \in A\} \rangle). \quad (9.1.0.8)$$

**Proposizione 9.1.10.** *Siano  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio proiettivo e  $p, q \in \mathbb{P}(V)$  punti distinti. Esiste una e una sola retta contenente sia  $p$  che  $q$ .*

*Dimostrazione.* Esistono  $v, w \in V$  non nulli tali che  $p = [v]$  e  $q = [w]$ . Siccome  $p \neq q$  i vettori  $v, w$  sono linearmente indipendenti e quindi generano un sottospazio vettoriale di  $V$  di dimensione 2. Quindi  $\mathbb{P}(\langle v, w \rangle)$  è una retta di  $\mathbb{P}(V)$  che contiene sia  $p$  che  $q$ . D'altra parte sia  $L \subset \mathbb{P}(V)$  una retta contenente  $p$  e  $q$ . Per definizione esiste un sottospazio vettoriale  $U \subset V$  di dimensione 2 tale che  $L = \mathbb{P}(U)$ . Siccome  $p = [v] \in L$  segue che  $v \in U$  e, analogamente, siccome  $q \in L$  abbiamo che  $w \in U$ . Quindi  $\langle v, w \rangle \subset U$  e siccome  $\dim \langle v, w \rangle = 2 = \dim U$  ne segue che  $U = \langle v, w \rangle$ , cioè  $L = \mathbb{P}(\langle v, w \rangle)$ .  $\square$

La **Proposizione 9.1.8** e la **Proposizione 9.1.10** mettono in evidenza l'analogia tra sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo e sottospazi affini di uno spazio affine. Nel seguito vedremo che esiste una fondamentale differenza tra spazi affini e spazi proiettivi - una differenza che si può sintetizzare dicendo che gli spazi proiettivi si comportano in modo più regolare degli spazi affini.

## 9.2 Spazi proiettivi e spazi affini

Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione  $(n+1)$ ; mostreremo che  $\mathbb{P}(V)$  è ricoperto da sottoinsiemi che sono in modo naturale dei- $\mathbb{K}$  spazi affini di dimensione  $n$ . Stabiliremo un collegamento tra questo fatto e la descrizione intuitiva di spazio proiettivo data all'inizio del presente capitolo.

### 9.2.1 Sottospazi affini di spazi proiettivi

Siano  $W \subset V$  un sottospazio vettoriale di dimensione  $n$  e  $u \in (V \setminus W)$ . Definiamo

$$\begin{aligned} W & \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \\ w & \mapsto [u+w] \end{aligned} \quad (9.2.1.1)$$

**Proposizione 9.2.1.** *L'applicazione  $\phi$  definita da (9.2.1.1) è una bijezione.*

*Dimostrazione.* Sia  $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ , quindi  $p = [v]$  dove  $v \notin W$ . Per Grassmann esistono  $w \in W$  e  $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$  tali che  $v = w + \lambda u$ , e perciò

$$p = [v] = [w + \lambda u] = [\lambda^{-1}w + u]. \quad (9.2.1.2)$$

Siccome  $\lambda^{-1}w \in W$  questo dimostra che  $\phi$  è suriettiva. Ora dimostriamo che  $\phi$  è iniettiva. Supponiamo che  $[u + w_1] = [u + w_2]$ : allora esiste  $0 \neq \mu \in \mathbb{K}$  tale che  $(u + w_1) = \mu(u + w_2)$ , ovvero  $(1 - \mu)u = (\mu w_2 - w_1)$ . Se  $\mu \neq 1$  segue che  $u = (\mu - 1)^{-1}(\mu w_2 - w_1) \in W$ , contro l'ipotesi, quindi  $\mu = 1$  e perciò  $w_1 = w_2$ .  $\square$

La (9.1) dà una rappresentazione grafica della  $\phi$  per  $V$  di dimensione 2.

*Esempio 9.2.2.* Sia  $V = \mathbb{K}^{n+1}$  e indichiamo i vettori di  $\mathbb{K}^{n+1}$  con  $(X_0, \dots, X_n)$ . Siano  $W := \ker(X_0)$  e  $u = [1, 0, \dots, 0]$ . Facciamo l'identificazione

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n & \longrightarrow W \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto (0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (9.2.1.3)$$

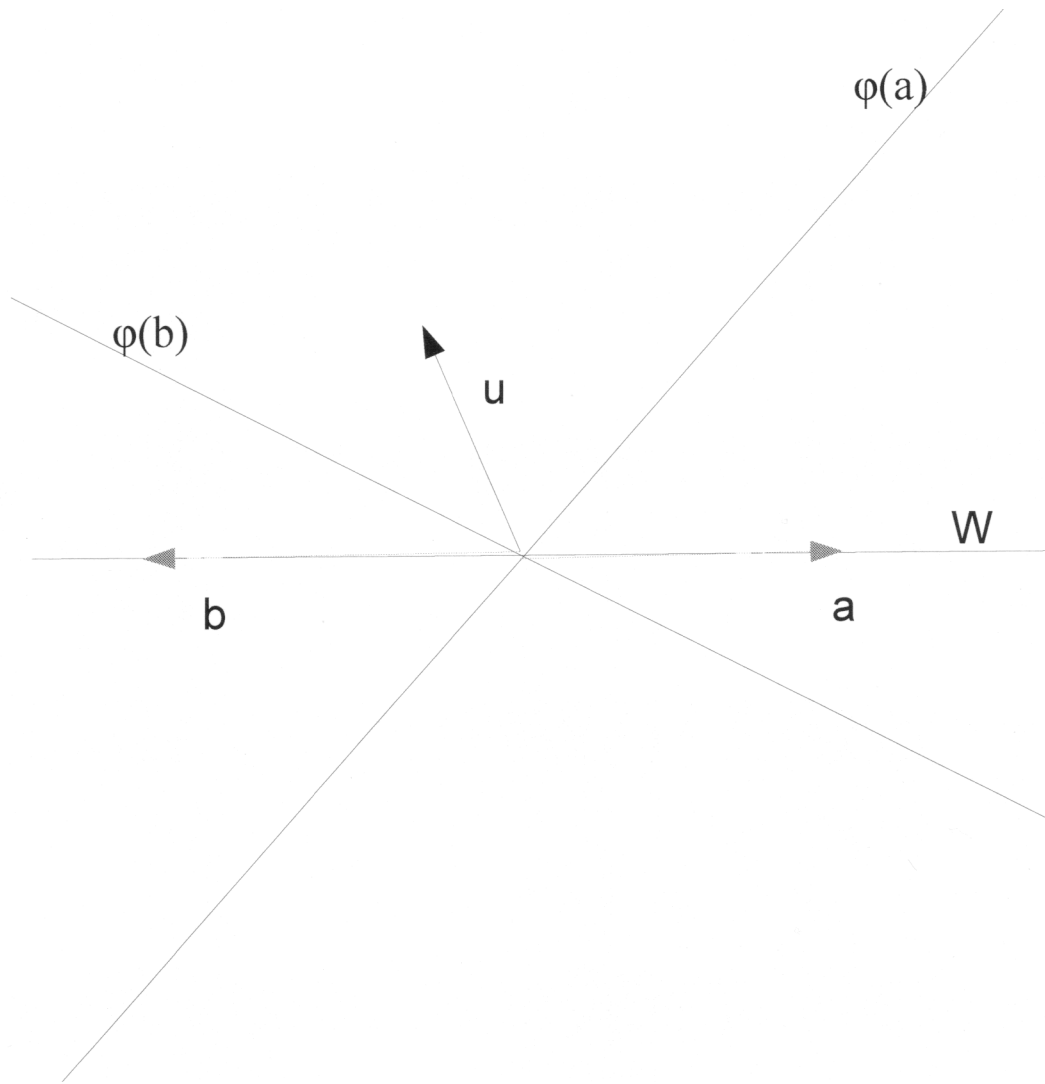


Figura 9.1: La bijezione (9.2.1.1) in dimensione 2

Con questa identificazione la mappa  $\phi$  di (9.2.1.1) diventa

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \ker(X_0) \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto [1, x_1, \dots, x_n] \end{aligned} \quad (9.2.1.4)$$

È utile notare che l'inversa di  $\phi$  è l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \ker(X_0) & \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{K}^n \\ [X_0, X_1, \dots, X_n] & \mapsto (X_1/X_0, X_2/X_0, \dots, X_n/X_0) \end{aligned} \quad (9.2.1.5)$$

Il risultato che segue afferma che la  $\phi$  è compatibile con le nozioni di sottospazio affine di  $W$  e di sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ .

**Proposizione 9.2.3.** *Sia  $\phi$  l'applicazione data da (9.2.1.1). Se  $L$  è un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  allora  $\phi^{-1}L$  è un sottospazio affine di  $W$  o è vuoto. Viceversa sia  $A \subset W$  un sottospazio affine e  $\langle \phi(A) \rangle$  il sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  generato da  $\phi(A)$ : allora  $\phi^{-1}(\langle \phi(A) \rangle) = A$ .*

*Dimostrazione.* Cominciamo dimostrando che se  $L$  è un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  allora  $\phi^{-1}(L)$  è un sottospazio affine di  $W$  o è vuoto. Per ipotesi esiste un sottospazio vettoriale  $S \subset V$  tale che  $L = \mathbb{P}(S)$ . Possiamo supporre che  $\phi^{-1}(L)$  non sia vuoto (altrimenti non c'è nulla da dimostrare). Sia  $w_0 \in \phi^{-1}(L)$ , cioè  $u + w_0 \in S$ . Dimostriamo che

$$\phi^{-1}(L) = w_0 + S \cap W. \quad (9.2.1.6)$$

Infatti sia  $w \in \phi^{-1}(L)$ , cioè  $u + w \in S$ : allora siccome  $S$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  si ha che

$$(w - w_0) = (u + w) - (u + w_0) \in S \cap W. \quad (9.2.1.7)$$

Questo dimostra che  $\phi^{-1}(L) \subset (w_0 + S \cap W)$ . Viceversa, sia  $z \in S \cap W$ : allora

$$u + (w_0 + z) = (u + w_0) + z \in S \quad (9.2.1.8)$$

cioè  $\phi(w_0 + z) \in L$ . Questo mostra che  $\phi^{-1}(L) \supset (w_0 + S \cap W)$  e finisce la dimostrazione di (9.2.1.6). Siccome  $S$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di  $V$  anche  $S \cap W$  lo è e quindi la (9.2.1.6) mostra che  $\phi^{-1}(L)$  è un sottospazio affine di  $W$ . Ora sia  $A \subset W$  un sottospazio affine e dimostriamo che  $\phi^{-1}(\langle \phi(A) \rangle) = A$ . Siano  $w_0 \in A$  e  $\mathcal{G}(A)$  la giacitura di  $A$  (quindi  $\mathcal{G}(A)$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ ). Sia  $S$  il sottospazio vettoriale di  $V$  definito da

$$S := \langle u + w_0 \rangle + \mathcal{G}(A). \quad (9.2.1.9)$$

Dimostriamo che  $\mathbb{P}(S) = \langle \phi(A) \rangle$ . È chiaro che  $\phi(A) \subset \mathbb{P}(S)$ , resta da dimostrare che se un sottospazio proiettivo  $L \subset \mathbb{P}(V)$  contiene  $\phi(A)$  allora contiene  $\mathbb{P}(S)$ . Per ipotesi  $L = \mathbb{P}(U)$  dove  $U \subset V$  è un sottospazio vettoriale. Siccome  $w_0 \in A$  abbiamo che  $(u + w_0) \in U$  e quindi  $\langle u + w_0 \rangle \subset U$ . Sia  $w \in \mathcal{G}(A)$ : allora  $(w_0 + w) \in A$  e quindi  $(u + w_0 + w) \in U$ , siccome  $U$  è uno spazio vettoriale contenente  $(u + w_0)$  segue che  $w \in U$ . Questo dimostra che  $\mathcal{G}(A) \subset U$ . Quindi  $U$  contiene  $(\langle u + w_0 \rangle + \mathcal{G}(A))$  ovvero  $S$ . Resta da dimostrare che  $\phi^{-1}(\mathbb{P}(S)) = A$ . È chiaro che  $A \subset \phi^{-1}(\mathbb{P}(S))$ . Ora sia  $w \in \phi^{-1}(\mathbb{P}(S))$  cioè  $(u + w) \in S$ . Quindi esistono  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $z \in \mathcal{G}(A)$  tali che  $(u + w) = \lambda(u + w_0) + z$ . Perciò  $(1 - \lambda)u = \lambda w_0 - w + z$ . Se  $\lambda \neq 1$  segue che  $u = (1 - \lambda)^{-1}(\lambda w_0 - w + z) \in W$  e questa è una contraddizione, quindi  $\lambda = 1$  e perciò  $w = (w_0 + z)$  ovvero  $w \in A$ .  $\square$

Abbiamo identificato  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  con lo spazio affine  $W$  e quindi gli abbiamo dato una struttura di spazio affine, ma per fare questo abbiamo scelto  $u \in (V \setminus W)$ . Se cambiamo  $u$  cambiamo l'identificazione tra  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  e  $W$ , sarebbe preferibile dare a  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  una struttura di spazio affine senza fare alcuna scelta. Spiegheremo come si possa dare una tale struttura affine. Innanzitutto ricordiamo che per dare una struttura affine dobbiamo definire un'azione di  $\mathcal{V}$  su  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ , cioè scegliere uno spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  e definire una "somma"  $p + v$  per ogni  $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  e  $v \in \mathcal{V}$  in modo tale che valgano le proprietà elencate nella **Definizione 3.4.1**. Ricordiamo che  $\mathcal{L}(V/W, W)$  è l'insieme delle applicazioni lineari dallo spazio quoziente  $V/W$  a  $W$ , e che  $\mathcal{L}(V/W, W)$ , con le operazioni di somma e prodotto per scalare puntuali è a sua volta uno spazio vettoriale - questa è la nostra scelta di spazio vettoriale che agirà su  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ . Dati  $[v] \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  e  $f \in \mathcal{L}(V/W, W)$  poniamo

$$[v] + f := [v + f(\bar{v})] \quad (9.2.1.10)$$

dove  $\bar{v} \in (V/W)$  è la classe di equivalenza di  $v$ . Prima di tutto notiamo che la (9.2.1.10) è ben posta: infatti siccome  $v \notin W$  e  $f(\bar{v}) \in W$  si ha che  $(v + f(\bar{v})) \neq 0$  e inoltre se sostituiamo a  $v$  il vettore  $\mu v$  con  $\mu \neq 0$ , allora la (9.2.1.10) ci dà come valore di  $[\mu v] + f$  il punto

$$[\mu v + f(\mu \bar{v})] = [\mu v + f(\mu \bar{v})] = [\mu v + \mu f(\bar{v})] = [v + f(\bar{v})]. \quad (9.2.1.11)$$

Inoltre facili calcoli danno che

- $p + \mathbf{0} = p$  per ogni  $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ .
- $p + (f + g) = (p + f) + g$  per ogni  $p \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  e  $f, g \in \mathcal{L}(V/W, W)$ .

- dati  $p, q \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  esiste un unico  $f \in \mathcal{L}(V/W, W)$  tale che  $p + f = q$ .

Quindi la (9.2.1.10) dà a  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  una struttura di spazio affine con spazio vettoriale associato  $\mathcal{L}(V/W, W)$  - notate che ora non abbiamo fatto alcuna scelta aggiuntiva.

*Osservazione 9.2.4.* Scelto  $u \in (V \setminus W)$  possiamo dare l'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V/W, W) & \xrightarrow{\sim} & W \\ f & \mapsto & f(\bar{u}) \end{array} \quad (9.2.1.12)$$

Si verifica facilmente che, fatta questa identificazione, la struttura di spazio affine su  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  con spazio vettoriale associato  $\mathcal{L}(V/W, W)$  è isomorfa alla struttura di spazio affine data dall'identificazione (9.2.1.1). Quindi possiamo riformulare la **Proposizione 9.2.3** dicendo che se  $L \subset \mathbb{P}(V)$  è un sottospazio proiettivo allora la sua intersezione con lo spazio affine  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  (dove  $W \subset V$  è un sottospazio vettoriale di codimensione 1) è un sottospazio affine o l'insieme vuoto, e che ogni sottospazio affine di  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  è dato dall'intersezione con un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ .

*Osservazione 9.2.5.* Per l'**Osservazione 9.2.4** la **Proposizione 9.2.3** afferma che se  $L \subset \mathbb{P}(V)$  è un sottospazio proiettivo allora  $L \cap (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  è un sottospazio affine (o vuoto), e che se  $A \subset (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  è un sottospazio affine allora  $\langle A \rangle \cap (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)) = A$ . La *chiusura* di un sottospazio affine  $A \subset (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  è il sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  generato da  $A$  (cioè  $\langle A \rangle$ ), e si denota  $\bar{A}$ .

*Osservazione 9.2.6.* Lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  si ottiene dallo spazio affine  $n$ -dimensionale  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  aggiungendo i punti di  $\mathbb{P}(W)$ , il quale a sua volta si ottiene da uno spazio affine di dimensione  $(n-1)$  aggiungendo i punti di uno spazio proiettivo di dimensione  $(n-2)$  e così via fino ad arrivare a un punto - confrontate con l'**Esempio 9.1.4**. Nel caso dello spazio proiettivo numerico  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  la decomposizione appena descritta si scrive

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \sqcup \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 \sqcup \{\text{punto}\}. \quad (9.2.1.13)$$

## 9.2.2 Il caso degli spazi proiettivi numerici

Sia  $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  un sottospazio lineare di equazioni cartesiane omogenee (9.1.0.5): allora  $L \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$  ha equazioni cartesiane *affini*

$$0 = F_1(1, x_1, \dots, x_n) = F_2(1, x_1, \dots, x_n) = \dots = F_r(1, x_1, \dots, x_n). \quad (9.2.2.1)$$

dove le  $(x_1, \dots, x_n)$  sono come in (9.2.1.4). È chiaro che le equazioni (9.2.2.1) definiscono un sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$  oppure il sottoinsieme vuoto. Viceversa sia  $A \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$  un sottospazio affine. Identifichiamo gli spazi affini  $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$  e  $\mathbb{K}^n$  per mezzo dell'isomorfismo (9.2.1.4). Quindi  $A$  sarà l'insieme delle soluzioni di equazioni cartesiane

$$0 = f_1(x_1, \dots, x_n) = f_2(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n), \quad (9.2.2.2)$$

dove ciascun  $f_i$  è un polinomio (in generale *non* omogeneo) di grado 1. Per  $1 \leq i \leq r$  sia

$$F_i := X_0 f_i(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0). \quad (9.2.2.3)$$

Notate che  $F_i$  è un polinomio omogeneo di grado 1: se  $f_i(x_1, \dots, x_n) = b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$  allora

$$F_i = b_i X_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j. \quad (9.2.2.4)$$

Allora  $\langle A \rangle$  è il sottospazio proiettivo di equazioni cartesiane omogenee

$$0 = F_1(X_0, \dots, X_n) = \dots = F_r(X_0, \dots, X_n). \quad (9.2.2.5)$$

Infatti l'insieme delle soluzioni di (9.2.2.5) è un sottospazio proiettivo  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  tale che  $\mathbb{P}(U) \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \mathbb{P}(\ker X_0)) = A$ , quindi è sufficiente dimostrare che  $\mathbb{P}(U)$  è generato da  $A$ . Siccome  $A$  è non vuoto  $(\ker X_0) \cap U$  è un sottospazio *proprio* di  $U$  e quindi  $U$  è generato dal complementare  $U \setminus (\ker X_0)$ , ovvero  $\mathbb{P}(U)$  è generato da  $A$ .

### 9.2.3 Punti all'infinito, formula di Grassmann

Siano  $V$  e  $W$  come nella **Sottosezione 9.2.1**. I punti di  $\mathbb{P}(W)$  si dicono *punti all'infinito* (o *punti impropri*) e  $\mathbb{P}(W)$  è l'*iperpiano all'infinito* (o *iperpiano improprio*) - notate che la terminologia è relativa alla scelta di un determinato sottospazio  $W \subset V$  con  $\dim W = (\dim V - 1)$ , non ha senso una nozione "assoluta" di punto all'infinito di  $\mathbb{P}(V)$ .

**Definizione 9.2.7.** Nello spazio proiettivo numerico  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  l'iperpiano all'infinito *tradizionale* è  $\mathbb{P}(\ker X_0)$ .

Perchè "punti all'infinito" ? Supponiamo che  $L, M \subset (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  siano rette parallele - ricordiamo che ciò significa che  $\mathcal{G}(L) = \mathcal{G}(M)$ . Allora le chiusure di  $L$  e  $M$  sono rette proiettive che si intersecano in un punto di  $\mathbb{P}(W)$  (cioè all'infinito), questo segue subito dalla (9.2.1.9). In particolare, nel caso in cui  $\dim V = 3$ , vediamo che il piano proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  è ottenuto aggiungendo al piano affine  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$  i punti (all'infinito) di intersezione di rette parallele. Questa discussione fa immaginare che i sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo godano di proprietà più semplici dei sottospazi affini di spazi affini. Le proprietà in questione sono una immediata conseguenza della formula di Grassmann per spazi vettoriali.

**Proposizione 9.2.8** (Formula di Grassmann proiettiva). *Siano  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio proiettivo e  $A, B$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ . Allora*

$$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim\langle A \cup B \rangle. \quad (9.2.3.1)$$

*Dimostrazione.* Esistono sottospazi vettoriali  $U, W \subset V$  tali che  $A = \mathbb{P}(U)$  e  $B = \mathbb{P}(W)$ . Quindi  $\langle A \cup B \rangle = \mathbb{P}(U + W)$ ,  $A \cap B = \mathbb{P}(U \cap W)$  e (9.2.3.1) segue dalla formula di Grassmann per spazi vettoriali.  $\square$

**Corollario 9.2.9.** *Siano  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio proiettivo e  $A, B \subset \mathbb{P}(V)$  sottospazi proiettivi tali che  $(\dim A + \dim B) \geq \dim \mathbb{P}(V)$ . Allora  $A \cap B$  non è vuoto.*

*Dimostrazione.* Per la (9.2.3.1) si ha che  $\dim(A \cap B) \geq 0$  e quindi  $A \cap B$  non è vuoto (ricordate che se  $A \cap B = \mathbb{P}(U)$  allora  $\dim(A \cap B) = (\dim U - 1)$ ).  $\square$

## 9.3 Applicazioni lineari

Siano  $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ . Supponiamo che  $f: V \rightarrow W$  sia un'applicazione *lineare iniettiva*. Sia  $L \in \mathbb{P}(V)$  cioè  $L \subset V$  è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Siccome  $f$  è lineare  $f(L)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{P}(W)$ , e siccome  $f$  è iniettiva  $\dim f(L) = 1$ , cioè  $f(L) \in \mathbb{P}(W)$ . Quindi la  $f$  definisce un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\mathbb{P}(f)} & \mathbb{P}(W) \\ [v] & \mapsto & [f(v)] \end{array} \quad (9.3.0.1)$$

**Definizione 9.3.1.** Un'applicazione  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è *lineare* se esiste un'applicazione lineare iniettiva  $f: V \rightarrow W$  tale che  $F = \mathbb{P}(f)$ . Una *proiettività* di  $\mathbb{P}(V)$  è un'applicazione lineare  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ .

In questa sezione studieremo le applicazioni lineari tra spazi proiettivi.

### 9.3.1 Applicazioni lineari: prime proprietà

**Proposizione 9.3.2.** *Se  $G: \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  e  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  sono applicazioni lineari allora  $F \circ G$  è un'applicazione lineare. Se  $F$  è una proiettività di  $\mathbb{P}(V)$  allora  $F^{-1}$  è una proiettività di  $\mathbb{P}(V)$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste  $f \in \text{GL}(V)$  tale che  $F = \mathbb{P}(f)$ ; siccome  $F^{-1} = \mathbb{P}(f^{-1})$  e  $f^{-1} \in \text{GL}(V)$  segue che  $F^{-1}$  è una proiettività di  $\mathbb{P}(V)$ . Per ipotesi esistono applicazioni lineari  $g: U \rightarrow V$  e  $f: V \rightarrow W$  tali che  $G = \mathbb{P}(g)$  e  $F = \mathbb{P}(f)$ . Siccome

$$F \circ G = \mathbb{P}(f \circ g) \quad (9.3.1.1)$$

e la composizione  $f \circ g$  è lineare segue che  $F \circ G$  è lineare.  $\square$

*Osservazione 9.3.3.* L'identità di  $\mathbb{P}(V)$  è un'applicazione lineare (è uguale a  $\mathbb{P}(\text{Id}_V)$ ). Per la prima affermazione della **Proposizione 9.3.2** segue che la collezione degli spazi proiettivi su  $\mathbb{K}$  con morfismi dati dalle applicazioni lineari è una categoria, in particolare esiste la nozione di isomorfismo tra spazi vettoriali. È chiaro dalla definizione che due spazi proiettivi sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

**Definizione 9.3.4.**  $\text{Aut}(\mathbb{P}(V))$  è l'insieme delle proiettività di  $\mathbb{P}(V)$ .

*Osservazione 9.3.5.* L'operazione di composizione di applicazioni dà ad  $\text{Aut}(\mathbb{P}(V))$  una struttura di gruppo: infatti l'identità di  $\mathbb{P}(V)$  è un'applicazione lineare e per la **Proposizione 9.3.2** la composizione di proiettività è una proiettività e una proiettività è un'applicazione biunivoca con inversa che è una proiettività.

In Geometria Proiettiva si studiano le proprietà dei sottoinsiemi di uno spazio proiettivo che sono invarianti per proiettività.

**Definizione 9.3.6.** Due sottoinsiemi  $A, B \subset \mathbb{P}(V)$  sono proiettivamente equivalenti se esiste una proiettività  $F \in \text{Aut}(\mathbb{P}(V))$  tale che  $F(A) = B$ . (Notate che l'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza perchè  $\text{Aut}(\mathbb{P}(V))$  è un gruppo.)

Per definizione abbiamo un'applicazione suriettiva

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}(V) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Aut}(V) \\ f & \mapsto & \mathbb{P}(f) \end{array} \quad (9.3.1.2)$$

L'applicazione  $\Phi$  è un omomorfismo di gruppi - vedi (9.3.1.1).

**Proposizione 9.3.7.** Il nucleo di  $\Phi$  è il sottogruppo delle applicazioni scalari  $\{\lambda \text{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ .

*Dimostrazione.* È chiaro che le applicazioni scalari appartengono al nucleo di  $\Phi$ . Ora supponiamo che  $f \in \text{GL}(V)$  sia nel nucleo di  $\Phi$ , cioè  $\mathbb{P}(f) = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ . Sia  $\{v_0, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ . Siccome  $\mathbb{P}(f) = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$  esistono  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}^*$  tali che  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  per  $0 \leq i \leq n$ . Supponiamo che esistano  $0 \leq i < j \leq n$  tali che  $\lambda_i \neq \lambda_j$ : allora  $f([v_i + v_j]) = [\lambda_i v_i + \lambda_j v_j]$  e siccome  $\lambda_i \neq \lambda_j$  segue che  $[\lambda_i v_i + \lambda_j v_j] \neq [v_i + v_j]$ , e questo contraddice l'ipotesi. Quindi  $\lambda_i = \lambda_j$  per ogni  $0 \leq i < j \leq n$  e perciò  $f$  è un'applicazione scalare.  $\square$

Il gruppo quoziente

$$\text{PGL}(V) := \text{GL}(V) / \{\lambda \text{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \quad (9.3.1.3)$$

è il gruppo proiettivo lineare. Per il Teorema di omomorfismo tra gruppi la **Proposizione 9.3.7** dà che la  $\Phi$  induce un isomorfismo

$$\text{PGL}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(\mathbb{P}(V)). \quad (9.3.1.4)$$

*Esempio 9.3.8.* Sia  $F \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1)$ . Per definizione esiste

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{K}) \quad (9.3.1.5)$$

tale che

$$F([X_0, X_1]) = [aX_0 + bX_1, cX_0 + dX_1]. \quad (9.3.1.6)$$

Nell' **Esempio 9.1.4** abbiamo identificato  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  con  $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . Applicando la (9.1.0.3) l'automorfismo  $F$  è identificato con la seguente bijezione di  $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ x & \mapsto & \frac{dx+c}{bx+a} \end{array} \quad (9.3.1.7)$$

Quindi  $\phi(-a/b) = \infty$  e  $\phi(\infty) = d/b$ . Le applicazioni (9.3.1.13) sono conosciute come "lineari fratte".



Il risultato che segue mette in relazione applicazioni proiettive e applicazioni affini. Ricordiamo che se  $V$  è uno spazio vettoriale di codimensione 1 allora  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$  è uno spazio affine - vedi **Sottosezione 9.2.1**.

**Proposizione 9.3.9.** *Siano  $V, W$  spazi vettoriali della stessa dimensione e  $H \subset V, J \subset W$  sottospazi vettoriali di codimensione 1.*

1. *Se  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è un'applicazione lineare tale che  $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(J)$  allora*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J)) \\ p & \mapsto & F(p) \end{array} \quad (9.3.1.8)$$

*è un'applicazione affine.*

2. *Viceversa sia  $\psi: (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)) \rightarrow (\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J))$  un'applicazione affine. Esiste una e una sola applicazione lineare  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tale che  $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(J)$  e valga (9.3.1.8).*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il primo punto. Per ipotesi esiste un'isomorfismo di spazi vettoriali  $f: V \rightarrow W$  tale che  $F = \mathbb{P}(f)$ . Siano  $v_0 \in (V \setminus H)$  e  $w_0 = f(v_0)$ . Siccome  $f(H) = J$  e  $f$  è un isomorfismo abbiamo che  $w_0 \in (W \setminus J)$ . Abbiamo le decomposizioni in somma diretta  $V = [v_0] \oplus H$  e  $W = [w_0] \oplus J$  e i corrispondenti isomorfismi di spazi affini (vedi **Osservazione 9.2.4**)

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H) & J & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J) \\ h & \mapsto & [v_0 + h] & j & \mapsto & [w_0 + j] \end{array} \quad (9.3.1.9)$$

Sia  $h \in H$ : l'uguaglianza  $f(v_0 + h) = (w_0 + f(h))$  mostra che  $\psi$  è un'applicazione affine. Si può descrivere come segue la corrispondente applicazione tra gli spazi vettoriali associati a  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$  e  $(\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J))$ , cioè  $\mathcal{L}(V/H, H)$  e  $\mathcal{L}(W/J, J)$  rispettivamente. Siccome  $f(H) = J$  l'applicazione lineare  $f$  induce un isomorfismo  $\bar{f}: V/H \xrightarrow{\sim} W/J$  con inversa  $\bar{f}^{-1}$ . Sia  $f_H: H \rightarrow J$  l'isomorfismo definito dalla restrizione di  $f$  a  $H$  e  $\Psi: \mathcal{L}(V/H, H) \rightarrow \mathcal{L}(W/J, J)$  l'applicazione lineare data da

$$\Psi(g) := f_H \circ g \circ \bar{f}^{-1}. \quad (9.3.1.10)$$

L'applicazione vettoriale  $\mathcal{L}(V/H, H) \rightarrow \mathcal{L}(W/J, J)$  associata a  $\psi$  è uguale a  $\Psi$ . Ora dimostriamo il punto 2. Gli isomorfismi di spazi affini (9.3.1.9) ci permettono di considerare  $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$  e  $\mathbb{P}(W) \setminus \mathbb{P}(J)$  come spazi affini su  $H$  e  $J$  rispettivamente. Sia  $\Psi: H \rightarrow J$  l'associato isomorfismo di spazi vettoriali. Siano  $v_0 \in V$  e  $w_0 \in W$  come sopra. Definiamo l'isomorfismo di spazi vettoriali

$$\begin{array}{ccc} V = [v_0] \oplus H & \xrightarrow{f} & W = [w_0] \oplus J \\ xv_0 + h & \mapsto & xw_0 + \Psi(h) \end{array} \quad (9.3.1.11)$$

dove  $h \in H$ . Sia  $F := \mathbb{P}(f)$ . Si verifica subito che  $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(J)$  e che vale (9.3.1.8). L'unicità di  $F$  si dimostra in modo simile, lasciamo i dettagli al lettore.  $\square$

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $H \subset V$  un sottospazio vettoriali di codimensione 1. Denotiamo con  $\text{Aut}(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$  il gruppo delle affinità di  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H))$ . Sia  $\text{Stab}(H) \subset \text{Aut}(\mathbb{P}(V))$  il sottoinsieme delle proiettività  $F$  tali che  $F(\mathbb{P}(H)) = \mathbb{P}(H)$ . Si verifica subito che  $\text{Stab}(H)$  è un sottogruppo di  $\text{Aut}(\mathbb{P}(V))$ . La **Proposizione 9.3.9** dà un isomorfismo di gruppi

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}(\mathbb{P}(H)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Aut}(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)) \\ F & \mapsto & (p \mapsto F(p)) \end{array} \quad (9.3.1.12)$$

*Esempio 9.3.10.* Facendo riferimento all' **Esempio 9.3.8** identifichiamo le proiettività di  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  con le applicazioni lineari fratte. Sia  $H \subset \mathbb{K}^2$  il sottospazio  $H := \{(0, b)\}$  e quindi  $\mathbb{P}(H) = \{\infty\}$ . Un'applicazione lineare fratta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ x & \mapsto & \frac{dx+c}{bx+a} \end{array} \quad (9.3.1.13)$$

manda  $\infty$  in se stesso se e solo se  $b = 0$  cioè se  $\phi(x) = rx + s$  dove  $r := d/a$  e  $s := c/a$ . Quindi (9.3.1.12) nel caso di  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  e il dato  $H$  diventa l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Stab}(\infty) &\xrightarrow{\sim} \text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1) \\ \left[ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \right] &\mapsto (x \mapsto (d/a)x + c/a) \end{aligned} \quad (9.3.1.14)$$

*Esempio 9.3.11.* Rendiamo esplicito l'isomorfismo (9.3.1.12) nel caso dello spazio proiettivo numerico  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  e l'iperpiano all'infinito  $H = \ker(X_0)$ . Ricordiamo le identificazioni (9.2.1.4) e (9.2.1.5). Denotiamo  $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$  con  $A = (a_{ij})$  dove  $0 \leq i, j \leq n$ . Abbiamo

$$\text{Stab}(\mathbb{P}(H)) = \{[A] \in \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \mid 1 = a_{00}, \quad 0 = a_{01} = a_{02} = \dots = a_{0n}\} \quad (9.3.1.15)$$

perchè se  $[A] \in \text{Stab}(\mathbb{P}(H))$  allora  $a_{00} \neq 0$  e possiamo riscalarlo  $A$  moltiplicandolo per  $a_{00}^{-1}$ . L'affinità di  $\mathbb{K}^n$  associata ad  $[A] \in \text{Stab}(\mathbb{P}(H))$  è data da  $X \mapsto B \cdot X + C$  dove  $B = (b_{ij}) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  è data da  $b_{ij} = a_{ij}$  per  $1 \leq i, j \leq n$  e  $C = (c_s) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  è data da  $c_s = a_{s,0}$  per  $1 \leq s \leq n$  (ricordiamo che  $A$  è come in (9.3.1.15)).

### 9.3.2 Punti in posizione generale

Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali. Una proiettività  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è univocamente determinata dai suoi valori su un insieme finito di punti di  $\mathbb{P}(V)$ . Prima di precisare quest'affermazione introdurremo alcune considerazioni. Siano  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(V)$  e quindi esistono  $v_i \in V$  per  $i = 1, \dots, m$  tali che  $P_i = [v_i]$ . Siano  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}^*$ . Se i vettori  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente dipendenti allora anche i vettori  $\mu_1 v_1, \dots, \mu_m v_m$  sono linearmente dipendenti, e (quindi) se  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente indipendenti allora  $\mu_1 v_1, \dots, \mu_m v_m$  sono linearmente indipendenti. Queste considerazioni mostrano che la seguente definizione è ben posta.

**Definizione 9.3.12.** Siano  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(V)$  e sia  $P_i = [v_i]$  per  $i = 1, \dots, m$ . I punti  $P_1, \dots, P_m$  sono *linearmente dipendenti* se i vettori  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente dipendenti, sono linearmente indipendenti se i vettori  $v_1, \dots, v_m$  sono *linearmente indipendenti*.

*Osservazione 9.3.13.* Nella **Definizione 9.3.12**  $P_1, \dots, P_m$  va intesa come una *lista* di punti, con eventuali ripetizioni: in questo caso i vettori sono linearmente dipendenti.

**Proposizione 9.3.14.** Sia  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Se  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(V)$  sono linearmente indipendenti allora  $m \leq (n + 1)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $P_i = [v_i]$  per  $i = 1, \dots, m$ . Per ipotesi i vettori  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente indipendenti, siccome  $\dim V = (n + 1)$  segue che  $m \leq (n + 1)$ .  $\square$

**Definizione 9.3.15.** Sia  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . I punti  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(V)$  sono in *posizione generale* se vale una delle seguenti alternative:

1.  $m \leq (n + 1)$  e  $P_1, \dots, P_m$  sono linearmente indipendenti,
2.  $m > (n + 1)$  e per ogni scelta di indici  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leq m$  i punti  $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_{n+1}}$  sono linearmente indipendenti.

Notate che nella **Definizione 9.3.15**  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(V)$  va intesa come una *lista* di punti, con eventuali ripetizioni, vedi l'**Osservazione 9.3.13**.

*Esempio 9.3.16.* Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $(n + 1)$  e  $\{v_0, \dots, v_n\}$  una sua base. Per  $i = 0, \dots, n$  sia  $P_i := [v_i] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ . È chiaro che i punti  $P_0, \dots, P_n$  sono linearmente indipendenti. Sia  $w := (a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$  e  $Q := [w] \in \mathbb{P}(V)$ . I punti  $P_0, \dots, P_n, Q$  sono in posizione generale se e solo se  $a_i \neq 0$  per  $0 \leq i \leq n$ . Infatti supponiamo che  $a_j = 0$  per un certo  $0 \leq j \leq n$ . Allora  $P_0, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n, Q$  sono linearmente dipendenti perchè  $v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, w$

non generano  $V$ , infatti appartengono al sottospazio proprio  $\langle v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle$ , quindi i punti  $P_0, \dots, P_n, Q$  non sono in posizione generale. Ora supponiamo che  $a_i \neq 0$  per  $0 \leq i \leq n$ . Sia  $0 \leq j \leq n$ : i punti  $P_0, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n, Q$  sono linearmente indipendenti perchè i vettori  $v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, w$  generano  $V$  e quindi sono linearmente indipendenti (giacchè sono  $(n+1)$  vettori).

*Osservazione 9.3.17.* Sia  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . I punti  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(V)$  sono in posizione generale se e solo se ogni sottolista di lunghezza al più  $(n+1)$  è fatta di punti linearmente indipendenti, cioè se dati comunque  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq m$  con  $r \leq (n+1)$  si ha che  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$  sono linearmente indipendenti. In particolare se  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(V)$  sono in posizione generale allora ogni sottolista di  $P_1, \dots, P_m$  è in posizione generale.

**Lemma 9.3.18.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $(n+1)$  e  $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$  punti in posizione generale. Esiste una base  $\{v_0, \dots, v_n\}$  di  $V$  tale che  $P_i = [v_i]$  per  $0 \leq i \leq n$  e  $P_{n+1} = [v_0 + v_1 + \dots + v_n]$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $w_0, \dots, w_n, u \in V$  tali che  $P_i = [w_i]$  per  $i = 0, \dots, n$  e  $P_{n+1} = [u]$ . Siccome  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}(V)$  sono linearmente indipendenti  $\{w_0, \dots, w_n\}$  è una base di  $V$ . Quindi esiste  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})$  tale che  $u = (a_0 w_0 + a_1 w_1 + \dots + a_n w_n)$ . Siccome  $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$  sono punti in posizione generale l'**Esempio 9.3.16** dà che  $a_i \neq 0$  per  $0 \leq i \leq n$ . Poniamo  $v_i := a_i w_i$  per  $i = 0, \dots, n$ . Siccome  $a_i \neq 0$  per  $0 \leq i \leq n$  anche  $\{v_0, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ , e si ha che  $P_{n+1} = [v_0 + v_1 + \dots + v_n]$ .  $\square$

**Proposizione 9.3.19.** *Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali con  $\dim V = \dim W = (n+1)$ . Siano  $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$  e  $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$  liste di punti in posizione generale. Esiste una e una sola applicazione lineare  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tale che  $F(P_i) = Q_i$  per  $0 \leq i \leq (n+1)$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi e per il **Lemma 9.3.18** esistono basi  $\{v_0, \dots, v_n\}$  di  $V$  e  $\{w_0, \dots, w_n\}$  di  $W$  tali che  $P_i = [v_i]$  e  $Q_i = [w_i]$  per  $i = 0, \dots, n$  e  $P_{n+1} = [v_0 + v_1 + \dots + v_n]$  e  $Q_{n+1} = [w_0 + w_1 + \dots + w_n]$ . L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}(W) \\ [x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n] & \mapsto & [x_0 w_0 + x_1 w_1 + \dots + x_n w_n] \end{array} \quad (9.3.2.1)$$

è un'applicazione lineare tale che  $F(P_i) = Q_i$  per  $0 \leq i \leq (n+1)$ . Ora dimostriamo l'unicità di  $F$ . Supponiamo che  $G: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  sia un'applicazione lineare tale che  $G(P_i) = Q_i$  per  $0 \leq i \leq (n+1)$ . Allora  $G = \mathbb{P}(g)$  dove  $g(v_i) = \mu_i w_i$  per  $0 \leq i \leq n$  e  $g(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \lambda(w_0 + w_1 + \dots + w_n)$ , dove  $\mu_i \neq 0$  per  $0 \leq i \leq n$  e  $\lambda \neq 0$ . Quindi

$$\mu_0 w_0 + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n = \lambda(w_0 + w_1 + \dots + w_n). \quad (9.3.2.2)$$

Siccome  $\{w_0, \dots, w_n\}$  è una base di  $W$  segue che  $\mu_i = \lambda$  per  $0 \leq i \leq n$  e quindi  $F = G$ .  $\square$

**Corollario 9.3.20.** *Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali con  $(n+1) = \dim V \leq \dim W$ . Siano  $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$  in posizione generale. Un'applicazione lineare  $F: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è determinata dai valori  $F(P_i)$  per  $0 \leq i \leq (n+1)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $G: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  un'applicazione lineare tale che  $F(P_i) = G(P_i)$  per  $0 \leq i \leq (n+1)$ : dobbiamo dimostrare che  $F = G$ . Siccome  $F = \mathbb{P}(f)$  dove  $f: V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare iniettiva, i punti  $F(P_0), F(P_1), \dots, F(P_{n+1})$  generano un sottospazio proiettivo  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$  di dimensione uguale alla dimensione di  $\mathbb{P}(V)$  cioè  $n$ , e sono in posizione generale in  $\mathbb{P}(U)$ . Le applicazioni  $F$  e  $G$  inducono applicazioni lineari  $\overline{F}: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(U)$  e  $\overline{G}: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(U)$ : siccome  $\dim V = \dim U$  la **Proposizione 9.3.19** dà che  $\overline{F} = \overline{G}$  e quindi  $F = G$ .  $\square$

### 9.3.3 Coordinate proiettive, Teorema di Pappo, birapporto

Sia  $\mathbb{P}(V)$  uno spazio proiettivo di dimensione  $n$ , cioè  $\dim V = (n + 1)$ . Quindi esiste un isomorfismo  $f: V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n+1}$ : sia

$$F: \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \quad (9.3.3.1)$$

l'isomorfismo indotto da  $f$ . Dato  $P \in \mathbb{P}(V)$  abbiamo  $F(P) = [a_0, \dots, a_n]$  e il vettore (non nullo)  $(a_0, \dots, a_n)$  è determinato a meno di un fattore comune non-nullo: le  $a_0, \dots, a_n$  sono le *coordinate proiettive* di  $P$  determinate dall'isomorfismo (9.3.3.1). Notiamo che la c'è un abuso della lingua: le coordinate proiettive di  $p$  *non* sono univocamente determinate da  $P$ , possiamo riscalarle per un fattore comune (non nullo).

*Esempio 9.3.21.* Sia  $\mathbb{K}[x, y]_2$  lo spazio vettoriale dei polinomi *omogenei* di grado 2 in  $x, y$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ . La base  $\{x^2, xy, y^2\}$  di  $\mathbb{K}[x, y]_2$  determina un isomorfismo  $\mathbb{K}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[x, y]_2$ : sia  $f: \mathbb{K}[x, y]_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^3$  la sua inversa. L'isomorfismo  $\mathbb{P}(f): \mathbb{P}(\mathbb{K}[x, y]_2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  definisce coordinate proiettive su  $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x, y]_2)$ . Le coordinate proiettive di  $[(x + y)^2]$  sono  $[1, 2, 1]$ , ma anche  $[3, 6, 3]$  o  $[-1, -2, -1]$ .

*Osservazione 9.3.22.* Sian  $\mathbf{P}$  uno spazio proiettivo di dimensione  $n$  e  $[X_0, \dots, X_n], [Y_0, \dots, Y_n]$  coordinate proiettive su  $\mathbf{P}$ . Allora esiste  $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$  tale che per ogni  $P \in \mathbf{P}$  abbiamo

$$[X(P)] = [A \cdot Y(P)] \quad (9.3.3.2)$$

dove  $X(P), Y(P)$  sono i vettori colonna delle coordinate proiettive di  $P$  nel primo e secondo sistema di riferimento rispettivamente. Infatti per definizione esistono isomorfismi  $F, G: \mathbf{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  tali che  $[X(P)] = F(P)$  e  $[Y(P)] = G(P)$ . L'automorfismo  $F \circ G^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$  è dato da  $\mathbb{P}(\phi)$  dove  $\phi: \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  è un isomorfismo di spazi vettoriali. Esiste  $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$  tale che  $\phi(Z) = A \cdot Z$  ed è chiaro che (9.3.3.2) vale con questa  $A$ . Inoltre la **Proposizione 9.3.7** dà che la matrice  $A$  di cambiamento di coordinate è determinata a meno di moltiplicazione per uno scalare non nullo.

Un modo per dare un isomorfismo (9.3.3.1) è quello di scegliere una base di  $V$ . Notate che se riscalamo i vettori della base per un fattore comune le coordinate proiettive non cambiano. Ora ci chiediamo come scegliere un isomorfismo (9.3.3.1) “vedendo solo i punti di  $\mathbb{P}(V)$ ” (e non i vettori di  $V$ ). La risposta è nella **Proposizione 9.3.19**. Infatti siano  $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$  punti in posizione generale. Siccome i punti

$$Q_0 := [1, 0, \dots, 0], Q_1 := [0, 1, 0, \dots, 0], \dots, Q_n := [0, 0, \dots, 0, 1], Q_{n+1} := [1, 1, \dots, 1, 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \quad (9.3.3.3)$$

sono in posizione generale (vedi l' **Esempio 9.3.16**) allora per la **Proposizione 9.3.19** esiste un unico isomorfismo  $F: \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  tale che  $F(P_i) = Q_i$  per  $0 \leq i \leq (n + 1)$ .

**Definizione 9.3.23.** Il sistema di coordinate proiettive individuato (come sopra) dalla scelta dei punti  $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$  in posizione generale è denotato  $\mathcal{R}(P_0, \dots, P_{n+1})$ . I punti  $P_0, \dots, P_n$  sono i *punti fondamentali* del riferimento, il punto  $P_{n+1}$  è il suo *punto unità*.

Una volta scelto un sistema di coordinate proiettive su  $\mathbb{P}(V)$  ogni problema riguardante sottospazi lineari di  $\mathbb{P}(V)$  si traduce in un problema riguardante sistemi di equazioni lineari omogenee nelle coordinate omogenee - ricordate che i sottospazi lineari di  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  si descrivono per mezzo di equazioni cartesiane. Diamo una dimostrazione “in coordinate” del seguente classico risultato di Geometria Proiettiva.

**Teorema 9.3.24** (di Pappo). *Sia  $\mathbf{P}$  un piano proiettivo e  $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}$  punti distinti tali che:*

1. *sia  $P_1, P_3, P_5$  che  $P_2, P_4, P_6$  sono allineati ma la retta contenente  $P_1, P_3, P_5$  è distinta dalla retta contenente  $P_2, P_4, P_6$ ,*
2. *nessuno dei  $P_i$  è nell'intersezione della retta contenente  $P_1, P_3, P_5$  con la retta contenente  $P_2, P_4, P_6$ .*

Allora i punti

$$\langle P_1, P_2 \rangle \cap \langle P_4, P_5 \rangle, \quad \langle P_2, P_3 \rangle \cap \langle P_5, P_6 \rangle, \quad \langle P_3, P_4 \rangle \cap \langle P_6, P_1 \rangle \quad (9.3.3.4)$$

(notate che per le ipotesi  $\langle P_1, P_2 \rangle \neq \langle P_4, P_5 \rangle$  etc.) sono allineati.

*Dimostrazione.* Per le ipotesi i punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono in posizione generale. Quindi abbiamo il riferimento proiettivo  $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ . Siano  $[a_0, a_1, a_2]$  e  $[b_0, b_1, b_2]$  le coordinate proiettive di  $P_5$  e  $P_6$  rispettivamente. Abbiamo le seguenti equazioni cartesiane (nelle coordinate proiettive del riferimento  $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ):

$$\langle P_1, P_3 \rangle : X_1 = 0, \quad \langle P_2, P_4 \rangle : X_0 - X_2 = 0. \quad (9.3.3.5)$$

Siccome  $P_1, P_3, P_5$  sono allineati abbiamo che  $a_1 = 0$ , e siccome  $P_2, P_4, P_6$  sono allineati abbiamo che  $b_0 = b_2$ . Inoltre vediamo che il punto d'intersezione di  $\langle P_1, P_3 \rangle$  e  $\langle P_2, P_4 \rangle$  ha coordinate  $[1, 0, 1]$ . Siccome  $P_5 \notin \{P_1, P_3\}$  e non è  $\langle P_1, P_3 \rangle \cap \langle P_2, P_4 \rangle$  ne segue che  $P_5$  ha coordinate  $[a_0, 0, 1]$  con  $a_0 \neq 0$ . Similmente abbiamo che  $P_6$  ha coordinate  $[1, b_1, 1]$  con  $b_1 \neq 0$ . Un facile calcolo dà le seguenti equazioni cartesiane:

$$\begin{aligned} \langle P_1, P_2 \rangle : X_2 = 0, \quad \langle P_2, P_3 \rangle : X_0 = 0, \\ \langle P_3, P_4 \rangle : X_0 - X_1 = 0, \quad \langle P_4, P_5 \rangle : X_0 + (a_0 - 1)X_1 - a_0X_2 = 0, \\ \langle P_5, P_6 \rangle : b_1X_0 + (a_0 - 1)X_1 - a_0b_1X_2 = 0, \quad \langle P_6, P_1 \rangle : X_1 - b_1X_2 = 0. \end{aligned}$$

Segue che

$$\langle P_1, P_2 \rangle \cap \langle P_4, P_5 \rangle = \{[1 - a_0, 1, 0]\}, \quad (9.3.3.6)$$

$$\langle P_2, P_3 \rangle \cap \langle P_5, P_6 \rangle = \{[0, a_0b_1, a_0 - 1]\}, \quad (9.3.3.7)$$

$$\langle P_3, P_4 \rangle \cap \langle P_6, P_1 \rangle = \{[b_1, b_1, 1]\} \quad (9.3.3.8)$$

Siccome

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1 - a_0 & 1 & 0 \\ 0 & a_0b_1 & a_0 - 1 \\ b_1 & b_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.3.3.9)$$

segue che i punti di (9.4.2.1) sono allineati. □

*Osservazione 9.3.25.* Possiamo pensare i punti  $P_1, \dots, P_6$  del teorema di Pappo come i vertici di un esagono. Le intersezioni di (9.4.2.1) sono le intersezioni tra lati opposti dell'esagono. La (9.2) dà una rappresentazione grafica del contenuto Teorema di Pappo.

Ora consideriamo il seguente problema. Dato uno spazio proiettivo  $\mathbf{P}$  e due collezioni di punti  $P_1, \dots, P_r$  e  $Q_1, \dots, Q_r$  di  $\mathbf{P}$ , come possiamo stabilire se esiste una proiettività  $F \in \text{Aut}(\mathbf{P})$  tale che  $F(P_i) = Q_i$  per  $i = 1, \dots, r$ ? Consideriamo il caso di una retta. Se  $r \leq 3$  la risposta è semplice: gli insiemi sono equivalenti se e solo se hanno le stesse ripetizioni, cioè se i  $P_i$  sono distinti e così anche i  $Q_i$  allora sono equivalenti, se  $P_1 = P_2$  e  $P_2 \neq P_3$  e analogamente per i  $Q_i$  allora sono equivalenti, etc. Infatti questo segue dalla **Proposizione 9.3.19**. Il primo caso interessante è quello di 4 punti  $P_1, \dots, P_4$ . Scegliamo coordinate proiettive  $[Z, X]$  su  $\mathbf{P}$  e siano  $[Z_i, X_i]$  le coordinate proiettive di  $P_i$ . Supponiamo che non esistano 3 indici distinti tali che i punti corrispondenti siano uguali e consideriamo il seguente *birapporto*

$$\frac{\det \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_4 & X_4 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_3 & X_3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_3 & X_3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_4 & X_4 \end{bmatrix}} = \quad (9.3.3.10)$$

Se il denominatore è uguale a 0, e quindi per le nostre ipotesi il numeratore non è nullo, il birapporto si pone uguale a  $\infty$ .

*Osservazione 9.3.26.* Notiamo che le coordinate dei punti  $P_i$  non sono univocamente determinate perchè possiamo riscalarle per un fattore  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , ma l'espressione (9.3.3.12) rimane invariata se sostituiamo una coppia  $(Z_i, X_i)$  con  $(\lambda Z_i, \lambda X_i)$  perchè numeratore e denominatore vengono moltiplicati per  $\lambda$ .

**Proposizione 9.3.27.** *Il birapporto dei punti  $P_1, \dots, P_4$  non dipende dalle coordinate proiettive scelte.*

*Dimostrazione.* Siano  $[Z', X']$  altre coordinate proiettive su  $\mathbf{P}$ . Per l' **Osservazione 9.3.22** esiste una  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$  tale che per ogni  $P \in \mathbf{P}$  si abbia

$$\begin{bmatrix} Z'(P) \\ X'(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z(P) \\ X(P) \end{bmatrix} \quad (9.3.3.11)$$

L'uguaglianza è a meno di un fattore scalare non nullo ma per l' **Osservazione 9.3.26** possiamo assumere che valga l'uguaglianza. Siccome ciascun determinante che appare nella (9.3.3.12) viene moltiplicato per  $\det A$  il birapporto rimane invariato.  $\square$

La **Proposizione 9.3.27** permette di dare la seguente definizione.

**Definizione 9.3.28.** Sia  $\mathbf{P}$  una retta proiettiva e  $P_1, \dots, P_4 \in \mathbf{P}$  tali che non esistano 3 indici distinti i cui punti corrispondenti siano uguali. Il birapporto di  $P_1, \dots, P_4$  è l'elemento di  $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$  dato da

$$\beta(P_1, \dots, P_4) := \frac{\det \begin{bmatrix} Z(P_1) & X(P_1) \\ Z(P_4) & X(P_4) \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z(P_2) & X(P_2) \\ Z(P_3) & X(P_3) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} Z(P_1) & X(P_1) \\ Z(P_3) & X(P_3) \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} Z(P_2) & X(P_2) \\ Z(P_4) & X(P_4) \end{bmatrix}} \quad (9.3.3.12)$$

dove  $[Z, X]$  è un arbitrario sistema di coordinate proiettive su  $\mathbf{P}$ .

*Esempio 9.3.29.* Il birapporto dei punti  $[1, 0], [0, 1], [1, 1], [Z_4, X_4] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  è

$$\beta(P_1, \dots, P_4) := X_4/Z_4. \quad (9.3.3.13)$$

*Osservazione 9.3.30.* Sia  $\mathbf{P}$  una retta proiettiva. Siano  $[Z, X]$  coordinate proiettive su  $\mathbf{P}$  e quindi  $x := X/Z$  è una coordinata affine sulla retta affine  $(\mathbf{P} \setminus \{[0, 1]\})$ . Il birapporto dei punti  $P_1, \dots, P_4 \in \mathbf{P}$  si può scrivere

$$\beta(P_1, \dots, P_4) := \frac{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}. \quad (9.3.3.14)$$

**Proposizione 9.3.31.** Sia  $\mathbf{P}$  una retta proiettiva e  $P_1, \dots, P_4, Q_1, \dots, Q_4 \in \mathbf{P}$ . Supponiamo che non esistano 3 indici distinti i cui punti corrispondenti  $P_i$  siano uguali e analogamente per i  $Q_j$ . Allora esiste una proiettività  $F \in \text{Aut}(\mathbf{P})$  tale che  $F(P_i) = Q_i$  per  $i = 1, \dots, 4$  se e solo se  $\beta(P_1, \dots, P_4) = \beta(Q_1, \dots, Q_4)$ .

*Dimostrazione.* Notiamo che esiste una tale  $F$  se e solo se esistono coordinate proiettive,  $[Z, X]$  e  $[Z', X']$  tali che

$$[Z(P_i), X(P_i)] = [Z'(P_i), X'(P_i)], \quad i = 1, \dots, 4. \quad (9.3.3.15)$$

Infatti se esistono tali sistemi di coordinate esistono isomorfismi  $G: \mathbf{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  e  $G': \mathbf{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  tali che  $G(P_i) = G'(P_i)$  per  $i = 1, \dots, 4$ : l'automorfismo  $F := G' \circ G \in \text{Aut}(\mathbf{P})$  porta  $P_i$  in  $Q_i$ . Viceversa, se esiste  $F \in \text{Aut}(\mathbf{P})$  tale che  $F(P_i) = Q_i$  per  $i = 1, \dots, 4$ , scegliamo un sistema di coordinate  $[Z, X]$  corrispondente a  $G: \mathbf{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ : il sistema di coordinate  $[Z', X']$  corrispondente a  $G \circ F^{-1}$  soddisfa (9.3.3.15). Ora supponiamo che esista una proiettività  $F \in \text{Aut}(\mathbf{P})$  tale che  $F(P_i) = Q_i$  per  $i = 1, \dots, 4$ : siccome esistono coordinate proiettive,  $[Z, X]$  e  $[Z', X']$  tali che valga (9.3.3.15) è chiaro che  $\beta(P_1, \dots, P_4) = \beta(Q_1, \dots, Q_4)$ . Viceversa supponiamo che  $\beta(P_1, \dots, P_4) = \beta(Q_1, \dots, Q_4)$ . Siano  $[Z, X], [Z', X']$  coordinate proiettive dei riferimenti  $\mathcal{R}(P_1, P_2, P_3)$  e  $\mathcal{R}(Q_1, Q_2, Q_3)$  rispettivamente. Per l' **Esempio 9.3.29** abbiamo

$$X(P_4)/Z(P_4) = \beta(P_1, \dots, P_4) = \beta(Q_1, \dots, Q_4) = X'(P_4)/Z'(P_4). \quad (9.3.3.16)$$

Quindi le coordinate  $[Z, X]$  di  $P_1, \dots, P_4$  sono uguali alle coordinate  $[Z', X']$  di  $Q_1, \dots, Q_4$  e perciò esiste una proiettività  $F \in \text{Aut}(\mathbf{P})$  che porta ciascun  $P_i$  in  $Q_i$ .  $\square$

### 9.3.4 Proiezioni, Teorema di Desargues

Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Se  $f$  è iniettiva le associamo l'applicazione lineare  $\mathbb{P}(f): \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ . In generale sia  $\rho: V \rightarrow V/\ker f$  l'applicazione quoziente e  $\bar{f}: V/\ker f \rightarrow W$  l'applicazione lineare indotta da  $f$ : allora  $f$  è la composizione delle applicazioni lineari

$$V \xrightarrow{\rho} V/\ker f \xrightarrow{\bar{f}} W. \quad (9.3.4.1)$$

Siccome  $\bar{f}$  è iniettiva le possiamo associare l'applicazione lineare  $\mathbb{P}(\bar{f}): \mathbb{P}(V/\ker f) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ . Alla  $\rho$ , o meglio al sottospazio  $\ker f$ , associeremo un'applicazione chiamata proiezione. Sia  $U \subset V$  un sottospazio vettoriale e

$$\rho: V \rightarrow V/U \quad (9.3.4.2)$$

l'applicazione quoziente: la *proiezione di  $\mathbb{P}(V)$  con centro  $\mathbb{P}(U)$*  è l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) & \xrightarrow{\pi_U} & \mathbb{P}(V/U) \\ [v] & \mapsto & [\rho(v)] \end{array} \quad (9.3.4.3)$$

Notate che (9.3.4.3) è ben definita perchè se  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  allora  $\rho(\lambda v) = \lambda\rho(v)$ .

*Esempio 9.3.32.* La proiezione di  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  con centro il punto  $P := [0, 0, \dots, 0, 1]$  può essere identificata con l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{P\}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1} \\ [X_0, \dots, X_n] & \mapsto & [X_0, \dots, X_{n-1}] \end{array} \quad (9.3.4.4)$$

Infatti il duale di  $\mathbb{K}^{n+1}/\langle(0, 0, \dots, 0, 1)\rangle$  è naturalmente identificato con il sottospazio  $\text{Ann}(0, 0, \dots, 0, 1) \subset (\mathbb{K}^{n+1})^\vee$  i cui elementi sono le funzioni lineari  $\varphi$  tali che  $\varphi(0, 0, \dots, 0, 1) = 0$ . La base di  $\text{Ann}(0, 0, \dots, 0, 1)$  data da  $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$  definisce un isomorfismo tra  $\text{Ann}(0, 0, \dots, 0, 1)$  e  $\mathbb{K}^n$ : dato questo isomorfismo la proiezione  $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{P\}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}/\langle(0, 0, \dots, 0, 1)\rangle)$  è identificata con (9.3.4.4).

*Osservazione 9.3.33.* Siano  $Q_1, \dots, Q_r \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U))$ : allora

$$\dim(\langle \pi_U(Q_1), \dots, \pi_U(Q_r) \rangle) \leq \dim(\langle Q_1, \dots, Q_r \rangle). \quad (9.3.4.5)$$

La corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V/U) & \longrightarrow & \{\mathbb{P}(S) \subset \mathbb{P}(V) \mid S \subset V \text{ sottospazio, } \dim S = (\dim U + 1), S \supset U\} \\ [x] & \mapsto & \mathbb{P}(\rho^{-1}(\langle x \rangle)) \end{array} \quad (9.3.4.6)$$

dà all'insieme dei sottospazi lineari di  $\mathbb{P}(V)$  di dimensione uguale a  $\dim U$  contenenti  $\mathbb{P}(U)$  una struttura di spazio proiettivo. Componendo (9.3.4.6) con (9.3.4.3) otteniamo la versione geometrica della proiezione di  $\mathbb{P}(V)$  con centro  $\mathbb{P}(U)$ :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) & \longrightarrow & \{\mathbb{P}(S) \subset \mathbb{P}(V) \mid S \subset V \text{ sottospazio, } \dim S = (\dim U + 1), S \supset U\} \\ Q & \mapsto & \langle \mathbb{P}(U) \cup \{Q\} \rangle \end{array} \quad (9.3.4.7)$$

Ora supponiamo che  $T \subset V$  sia un sottospazio trasverso a  $U$ , cioè tale che  $V$  sia somma diretta di  $U$  e  $T$ . La restrizione di  $\rho$  a  $T$  è un isomorfismo  $T \xrightarrow{\sim} V/U$  e quindi identifica  $\mathbb{P}(V/U)$  con  $\mathbb{P}(T)$ , perciò possiamo identificare la proiezione (9.3.4.3) con un'applicazione  $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) \rightarrow \mathbb{P}(T)$ . Grazie a (9.3.4.7) la descrizione geometrica di quest'applicazione è

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)) & \xrightarrow{\pi_{U,T}} & \mathbb{P}(T) \\ Q & \mapsto & \langle \mathbb{P}(U) \cup \{Q\} \rangle \cap \mathbb{P}(T) \end{array} \quad (9.3.4.8)$$

*Esempio 9.3.34.* Se il centro della proiezione è un punto  $P \in \mathbb{P}(V)$  allora  $\mathbb{P}(T)$  è un iperpiano. Possiamo pensare che  $P$  sia una sorgente di luce ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\dim \mathbb{P}(V) = 3$ ). L'immagine di un punto  $Q \in (\mathbb{P}(V) \setminus \{P\})$  è l'ombra *proiettata* dalla sorgente di luce  $P$  sul piano  $\mathbb{P}(T)$  - da qui il nome proiezione.

*Esempio 9.3.35.* Supponiamo che  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\dim V = 4$  e il centro della proiezione è un punto  $P \in \mathbb{P}(V)$ . Quindi  $\mathbb{P}(T)$  è un piano. Possiamo pensare che  $P$  sia l'occhio di un pittore e che  $\mathbb{P}(T)$  sia il quadro su cui il pittore dipinge (opportunosamente prolungato all'infinito in ogni direzione). L'immagine di un punto  $Q \in (\mathbb{P}(V) \setminus \{P\})$  è il punto che rappresenta  $Q$  sul quadro  $\mathbb{P}(T)$ .

Ora supponiamo che  $T' \subset V$  sia un altro sottospazio trasverso a  $U$ . La composizione

$$\pi_{U,T'} \circ \pi_{U,T}^{-1}: \mathbb{P}(T) \rightarrow \mathbb{P}(T') \quad (9.3.4.9)$$

è un isomorfismo di spazi proiettivi e si chiama *prospettività*. Applicheremo l'idea della proiezione per dimostrare il classico Teorema di Desargues. Un *triangolo* in uno spazio proiettivo consiste di tre punti *non allineati*: i punti  $P_i$  sono i vertici del triangolo, le rette  $\langle P_i, P_j \rangle$  per  $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$  sono i *lati* del triangolo.

**Teorema 9.3.36** (di Desargues). *Siano  $P_1, P_2, P_3$  e  $Q_1, Q_2, Q_3$  triangoli in un piano proiettivo  $\mathbf{P}$ . Supponiamo che vertici e lati corrispondenti<sup>1</sup> dei triangoli siano distinti e che esista  $O \in \mathbf{P}$ , distinto dai vertici dei triangoli, contenuto nelle rette  $\langle P_i, Q_i \rangle$  per  $i = 1, 2, 3$ . Allora le intersezioni dei lati corrispondenti*

$$\langle P_1, P_2 \rangle \cap \langle Q_1, Q_2 \rangle, \quad \langle P_2, P_3 \rangle \cap \langle Q_2, Q_3 \rangle, \quad \langle P_3, P_1 \rangle \cap \langle Q_3, Q_1 \rangle \quad (9.3.4.10)$$

*sono allineate.*

*Dimostrazione.* Esiste uno spazio vettoriale  $W$  di dimensione 3 tale che  $\mathbf{P} = \mathbb{P}(W)$ . Sia  $V := W \oplus \mathbb{K}$ : allora  $\dim \mathbb{P}(V) = 3$  e  $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$  è un piano. Supponiamo che esistano  $R, O' \in (\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W))$ , rette  $L'_1, L'_2, L'_3 \subset \mathbb{P}(V)$  non coplanari contenenti  $O'$  e triangoli  $P'_1, P'_2, P'_3$  e  $Q'_1, Q'_2, Q'_3$  in  $\mathbb{P}(V)$  tali che

1. per ogni  $1 \leq i \leq 3$  si ha che  $P'_i, Q'_i \in (L'_i \setminus \{O'\})$ ,
2. la proiezione  $\pi: (\mathbb{P}(V) \setminus \{R\}) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  di centro  $R$  manda  $P'_1, P'_2, P'_3, Q'_1, Q'_2, Q'_3$  in  $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$  rispettivamente.

Allora i punti di (9.3.4.10) sono allineati. Infatti per ogni  $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$  le rette  $\langle P'_i, P'_j \rangle$  e  $\langle Q'_i, Q'_j \rangle$  appartengono al piano  $\langle L'_i, L'_j \rangle$  e quindi si incontrano in un punto  $S'_{ij}$  (notate che  $L'_i \neq L'_j$  perchè se fossero uguali allora sarebbero uguali i lati  $\langle P_i, P_j \rangle$  e  $\langle Q_i, Q_j \rangle$ , contro le nostre ipotesi). I punti  $S'_{12}, S'_{23}, S'_{31}$  appartengono all'intersezione dei piani  $\langle P'_1, P'_2, P'_3 \rangle$  e  $\langle Q'_1, Q'_2, Q'_3 \rangle$ , e questi piani sono distinti perchè le rette  $L'_1, L'_2, L'_3 \subset \mathbb{P}(V)$  non sono coplanari. Quindi  $S'_{12}, S'_{23}, S'_{31}$  appartengono alla retta d'intersezione dei piani  $\langle P'_1, P'_2, P'_3 \rangle$  e  $\langle Q'_1, Q'_2, Q'_3 \rangle$  e perciò anche le loro proiezioni su  $\mathbb{P}(W)$  dal punto  $R$  sono punti allineati. Ma la proiezione di  $S'_{ij}$  è uguale a  $\langle P_i, P_j \rangle \cap \langle Q_i, Q_j \rangle$  e perciò i punti di (9.3.4.10) sono allineati. Si finisce la dimostrazione del teorema di Desargues facendo vedere che esistono sempre  $R, O', L'_1, L'_2, L'_3 \subset \mathbb{P}(V)$  e triangoli  $P'_1, P'_2, P'_3$  e  $Q'_1, Q'_2, Q'_3$  in  $\mathbb{P}(V)$  come sopra - lasciamo i dettagli al lettore.  $\square$

La figura (9.3) illustra il contenuto del Teorema di Desargues.

## 9.4 Dualità

Sia  $\mathbf{P}$  un piano proiettivo. Un punto  $p \in \mathbf{P}$  e una retta  $L \subset \mathbf{P}$  sono *incidenti* se  $p \in L$ . La nozione di dualità nasce dall'osservazione che la relazione di incidenza si comporta in modo simmetrico: se  $p_1 \neq p_2 \in \mathbf{P}$  allora esiste una e una sola retta incidente sia a  $p_1$  che a  $p_2$ , ma d'altra parte se  $L_1 \neq L_2 \subset \mathbf{P}$  sono rette esiste uno e un solo punto incidente sia a  $L_1$  che a  $L_2$ .

<sup>1</sup>I vertici  $P_i$  e  $Q_j$  sono corrispondenti se  $i = j$ , i lati  $\langle P_i, P_j \rangle$  e  $\langle P_k, P_h \rangle$  sono corrispondenti se  $\{i, j\} = \{k, h\}$ .



### 9.4.1 Il duale di uno spazio proiettivo

Sia  $\mathbf{P}$  uno spazio proiettivo. Il *duale* di  $\mathbf{P}$  è l'insieme  $\mathbf{P}^\vee$  degli *iperpiani* di  $\mathbf{P}$ , cioè dei suoi sottospazi di codimensione 1:

$$\mathbf{P}^\vee := \{H \subset \mathbf{P} \mid H \text{ è un sottospazio di codimensione } 1\}. \quad (9.4.1.1)$$

Identificheremo  $\mathbf{P}^\vee$  in modo naturale con il proiettivato di uno spazio vettoriale. Per definizione  $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V)$  per un qualche spazio vettoriale  $V$ . Sia  $V^\vee$  lo spazio vettoriale duale di  $V$ : quindi gli elementi di  $V^\vee$  sono funzioni lineari  $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ . Se  $[f] \in \mathbb{P}(V^\vee)$  allora  $f \neq 0$  e quindi  $\ker f$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  di codimensione 1. Se  $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$  allora  $\ker(\lambda f) = \ker f$ . Quindi abbiamo un'applicazione lineare ben definita

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V^\vee) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}(V)^\vee \\ [f] & \mapsto & \mathbb{P}(\ker f) \end{array} \quad (9.4.1.2)$$

**Proposizione 9.4.1.** *L'applicazione (9.4.1.2) è biunivoca.*

*Dimostrazione.* La proposizione segue subito dalla **Proposizione 4.6.5**. Diamo una dimostrazione ex-novo per comodità del lettore. Sia  $H \in \mathbb{P}(V)^\vee$ , cioè  $H \subset \mathbb{P}(V)$  è un sottospazio di codimensione 1. Per definizione esiste un sottospazio vettoriale  $W \subset V$  di codimensione 1 tale che  $H = \mathbb{P}(W)$ . Siccome  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  di codimensione 1 esiste  $f \in V^\vee$  tale che  $W = \ker f$  (estendiamo una base  $\{w_1, \dots, w_n\}$  di  $W$  a una base  $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$  di  $V$  e poniamo  $f := w_0^\vee$ ) e quindi  $H = \Phi([f])$ . Questo dimostra che  $\Phi$  è suriettiva. Ora dimostriamo che  $\Phi$  è iniettiva. Supponiamo che  $\Phi([f]) = \Phi([g])$ : dobbiamo dimostrare che  $f$  e  $g$  sono linearmente dipendenti. Supponiamo per assurdo che  $f$  e  $g$  siano linearmente indipendenti. Sia  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ : quindi  $f(\sum_{i=0}^n x_i v_i) = \sum_{i=0}^n a_i x_i$  e  $g(\sum_{i=0}^n x_i v_i) = \sum_{i=0}^n b_i x_i$ . Per l'ipotesi che  $f$  e  $g$  sono linearmente indipendenti i vettori  $(a_0, \dots, a_n)$  e  $(b_0, \dots, b_n)$  di  $\mathbb{K}^{n+1}$  sono linearmente indipendenti: segue che le soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee

$$0 = \sum_{i=0}^n a_i x_i = \sum_{i=0}^n b_i x_i \quad (9.4.1.3)$$

ha codimensione 2 in  $\mathbb{K}^{n+1}$  ovvero che  $\ker(f) \neq \ker(g)$ . Questo contraddice l'ipotesi  $\Phi([f]) = \Phi([g])$ . Siccome siamo arrivati a un assurdo supponendo che  $f$  e  $g$  siano linearmente indipendenti, segue che  $f$  e  $g$  sono linearmente dipendenti.  $\square$

Quindi la (9.4.1.2) dà a  $\mathbf{P}^\vee$  una struttura di spazio proiettivo. Chiediamoci la seguente domanda: quali sono i sottospazi proiettivi di  $\mathbf{P}^\vee$ ? Esiste una risposta sibillina: un sottoinsieme è un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)^\vee$  se è la proiettificazione di un sottospazio vettoriale di  $V^\vee$ . Il punto è che esiste una descrizione "visibile" dei sottospazi proiettivi del duale. Dato un sottospazio proiettivo  $L \subset \mathbf{P}$  poniamo

$$\text{Ann}(L) := \{H \in \mathbf{P}^\vee \mid H \supset L\}. \quad (9.4.1.4)$$

*Osservazione 9.4.2.* Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $W \subset V$  un sottospazio. Quindi abbiamo  $\text{Ann}(W) \subset V^\vee$  e  $\text{Ann}(\mathbb{P}(W)) \subset \mathbb{P}(V)^\vee$ : segue dalle definizioni che  $\text{Ann}(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W))$ . Inoltre

$$\dim \text{Ann}(\mathbb{P}(W)) = \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) - 1 \quad (9.4.1.5)$$

per la **Proposizione 4.6.5**.

**Proposizione 9.4.3.** *Un sottoinsieme  $Z \subset \mathbf{P}^\vee$  è un sottospazio proiettivo se e solo se esiste un sottospazio proiettivo  $L \subset \mathbf{P}$  tale che  $Z = \text{Ann}(L)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V)$ . Se  $L = \mathbb{P}(W)$  dove  $W \subset V$  è un sottospazio vettoriale allora  $\text{Ann}(L)$  è un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)^\vee$  per l'**Osservazione 9.4.2**. Viceversa sia  $Z \subset \mathbb{P}(V)^\vee$  un sottospazio proiettivo. Quindi esiste un sottospazio vettoriale  $U \subset V^\vee$  tale che  $Z = \mathbb{P}(U)$ . Sia  $\{f_1, \dots, f_c\}$  una

base di  $U$  e poniamo  $W := \ker f_1 \cap \dots \cap \ker f_c$ . Siccome  $f_1, \dots, f_c$  sono linearmente indipendenti l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{K}^c \\ v &\longmapsto (f_1(v), \dots, f_c(v)) \end{aligned} \quad (9.4.1.6)$$

è suriettiva (se non lo fosse l'immagine sarebbe un sottospazio proprio e allora esisterebbero  $\lambda_1, \dots, \lambda_c \in \mathbb{K}$  non tutti nulli tali che  $\lambda_1 f_1(v) + \dots + \lambda_c f_c(v) = 0$  per ogni  $v \in V$ , cioè una relazione di dipendenza lineare tra  $f_1, \dots, f_c$ ) e quindi  $\dim W = (\dim V - c)$ . D'altra parte per la **Proposizione 4.6.5** si ha che  $\dim \text{Ann}(W) = \dim V - (\dim V - c) = c$ : siccome  $U \subset \text{Ann} W$  e  $\dim U = c$  segue che  $U = \text{Ann} W$  e perciò  $Z = \text{Ann}(\mathbb{P}(W))$ .  $\square$

*Esempio 9.4.4.* Sia  $V$  uno spazio vettoriale. La *stella* di iperpiani di centro  $p \in \mathbb{P}(V)$  è l'iperpiano  $\text{Ann}(p)$ : questi sono gli iperpiani di  $\mathbb{P}(V^\vee)$ . Un *fascio* di iperpiani di centro un sottospazio proiettivo  $L \subset \mathbb{P}(V)$  di codimensione 2 è l'insieme degli iperpiani contenenti  $L$ : queste sono le rette di  $\mathbb{P}(V^\vee)$ .

*Osservazione 9.4.5.* Siano  $L, M \subset \mathbb{P}(V)$  sottospazi proiettivi. Allora  $\text{Ann}(L) = \text{Ann}(M)$  solo se  $L = M$ . Quindi la **Proposizione 9.4.3** e l'**Osservazione 9.4.2** danno una bijezione

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &\longrightarrow (\mathbb{P}(V^\vee)^\vee) \\ p &\longmapsto \text{Ann}(p) \end{aligned} \quad (9.4.1.7)$$

Questa non è altro che la proiettivizzazione dell'isomorfismo naturale  $V \xrightarrow{\sim} (V^\vee)^\vee$ , vedi la **Proposizione 4.6.14**.

## 9.4.2 Teoremi in dualità

Ogni teorema ha un suo teorema duale, ottenuto scrivendo ipotesi e tesi del teorema per lo spazio duale. Per esempio il duale del Teorema di Pappo è il seguente.

**Teorema 9.4.6** (duale del Teorema di Pappo). *Sia  $\mathbf{P}$  un piano proiettivo e  $L_1, \dots, L_6 \subset \mathbf{P}$  rette distinte tali che:*

1.  $L_1, L_3, L_5$  contengono il punto  $p$  e  $L_2, L_4, L_6$  contengono il punto  $q$ , dove  $p \neq q$ ,
2. nessuna delle rette  $L_i$  contiene sia  $p$  che  $q$ .

Allora le rette

$$\langle L_1 \cap L_2, L_4 \cap L_5 \rangle, \quad \langle L_2 \cap L_3, L_5 \cap L_6 \rangle, \quad \langle L_3 \cap L_4, L_6 \cap L_1 \rangle \quad (9.4.2.1)$$

(notate che per le ipotesi  $L_1 \cap L_2 \neq L_4 \cap L_5$  etc.) hanno un punto in comune.

Come abbiamo ottenuto il **Teorema 9.4.6** dal **Teorema 9.3.24**? Sia  $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V)$  dove  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione 3. Il **Teorema 9.4.6** è ottenuto esplicitando l'enunciato del **Teorema 9.3.24** per lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}(V^\vee)$ . L'ipotesi del **Teorema 9.3.24** si traduce nell'ipotesi del **Teorema 9.4.6** perchè rette di un piano  $\mathbf{P}$  sono allineate (quando le consideriamo come punti del duale  $\mathbf{P}^\vee$ ) se solo se hanno un punto d'intersezione  $p$ , e, nel caso che non siano rette coincidenti, l'unica retta di  $\mathbf{P}^\vee$  che le contiene è il fascio di centro  $p$ . Analogamente la tesi del **Teorema 9.3.24** si traduce nella tesi del **Teorema 9.4.6** perchè il sottospazio generato da rette distinte  $L_1, L_2 \subset \mathbf{P}$  è il fascio di rette di centro  $L_1 \cap L_2$ , e perchè l'intersezione del fascio di centro  $p$  e il fascio di centro  $q$  è la retta  $\langle p, q \rangle$  se  $p \neq q$ .

## 9.5 Quadriche proiettive

### Esercizi del Capitolo 9

**Esercizio 9.1.** *Verificare che i punti*

$$[a_0, a_1, a_2], [b_0, b_1, b_2], [c_0, c_1, c_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$$

sono allineati se e solo se

$$0 = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}.$$

A partire da questo risultato ottenere un criterio necessario e sufficiente perchè punti  $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$  siano allineati.

**Esercizio 9.2.** Sia  $\mathbf{P}$  uno spazio proiettivo su  $\mathbb{K}$  di dimensione 3. Siano  $L_1, L_2 \subset \mathbf{P}$  due rette sghembe, cioè disgiunte. Sia  $p \in (\mathbf{P} \setminus L_1 \setminus L_2)$ . Dimostrate che esiste una e una sola retta  $R$  contenente  $p$  e incidente sia  $L_1$  che  $L_2$  (incidente  $L_i$  vuol dire che ha intersezione non vuota con  $L_i$ ).

**Esercizio 9.3.** Dato un numero primo  $p$  sia  $\mathbb{F}_p$  il campo (determinato a meno di isomorfismo) di cardinalità  $p$ , quindi  $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/(p)$ . Determinate la cardinalità di  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^n$ .

**Esercizio 9.4.** Siano  $A_1, A_2 \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$  le rette affini di equazioni cartesiane

$$A_1 : 3x_1 + 2x_2 - 1 = 0, \quad A_2 : 3x_1 + 2x_2 + 5 = 0. \quad (9.5.0.2)$$

(Come di consueto identifichiamo gli spazi affini  $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{P}(\ker X_0))$  e  $\mathbb{R}^2$  via (9.2.1.4).)

1. Date equazioni cartesiane omogenee di  $\overline{A}_1$  e  $\overline{A}_2$ .
2. Determinate il punto d'intersezione tra  $\overline{A}_1$  e  $\overline{A}_2$ .

**Esercizio 9.5.** Sia  $p$  un numero primo. Determinate la cardinalità del gruppo finito  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1)$ . I gruppi  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1)$  per  $p = 2, 3$  sono isomorfi a gruppi ben noti: quali ?

**Esercizio 9.6.** Dimostrate che il gruppo  $\text{PGL}_2(\mathbb{K})$  è generato dalle immagini dei seguenti sottogruppi (abeliani) di  $\text{GL}_2(\mathbb{K})$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \mathbb{K} \ni a \neq 1 \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{K} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (9.5.0.3)$$

**Esercizio 9.7.** Esercizio(i) sulle simmetrie di  $\{P_1, \dots, P_4\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ . Azione di  $S_4$  sul birapporto e invariante- $j$ .

**Esercizio 9.8.** Sia  $\mathbf{P}$  uno spazio proiettivo su  $\mathbb{K}$  di dimensione 3. Siano  $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbf{P}$  rette a due a due sghembe. Dimostrate che l'unione delle rette  $R$  incidenti  $L_1, L_2$  e  $L_3$  è una quadrica non-degenere.

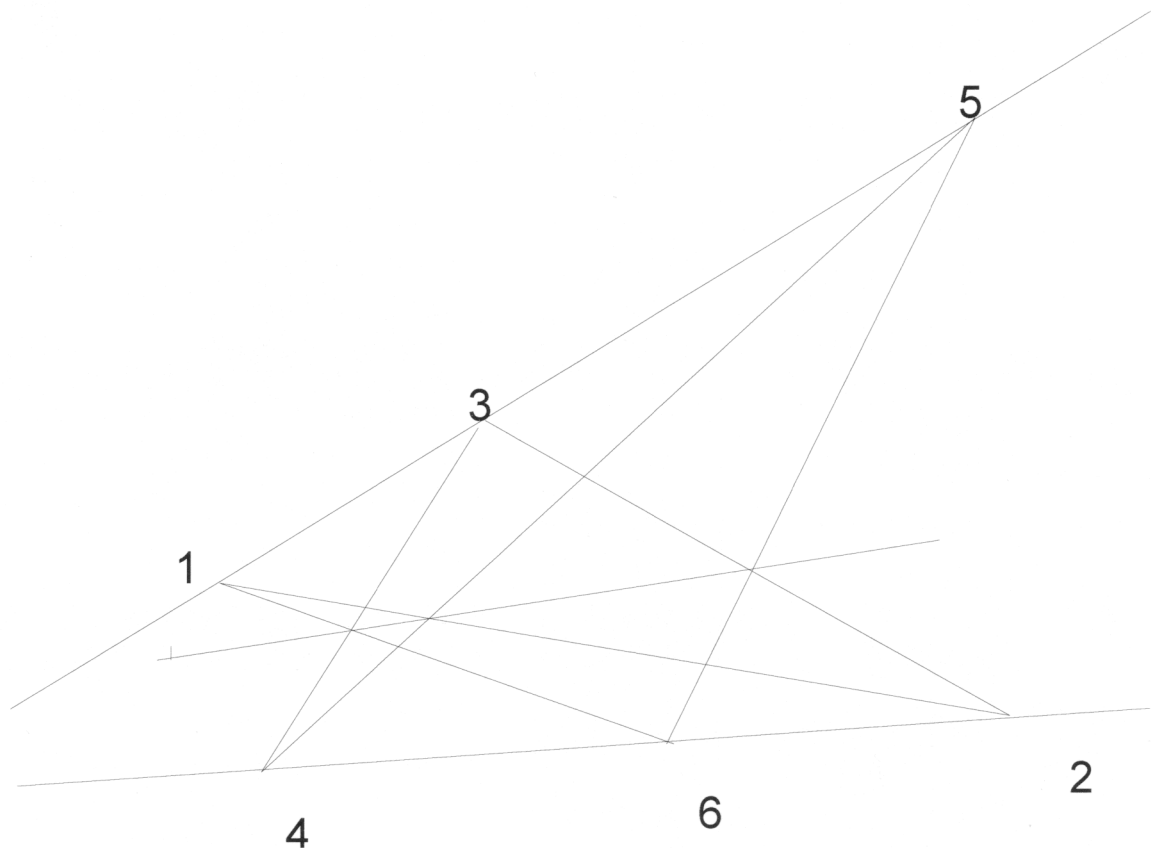


Figura 9.2: Il Teorema di Pappo

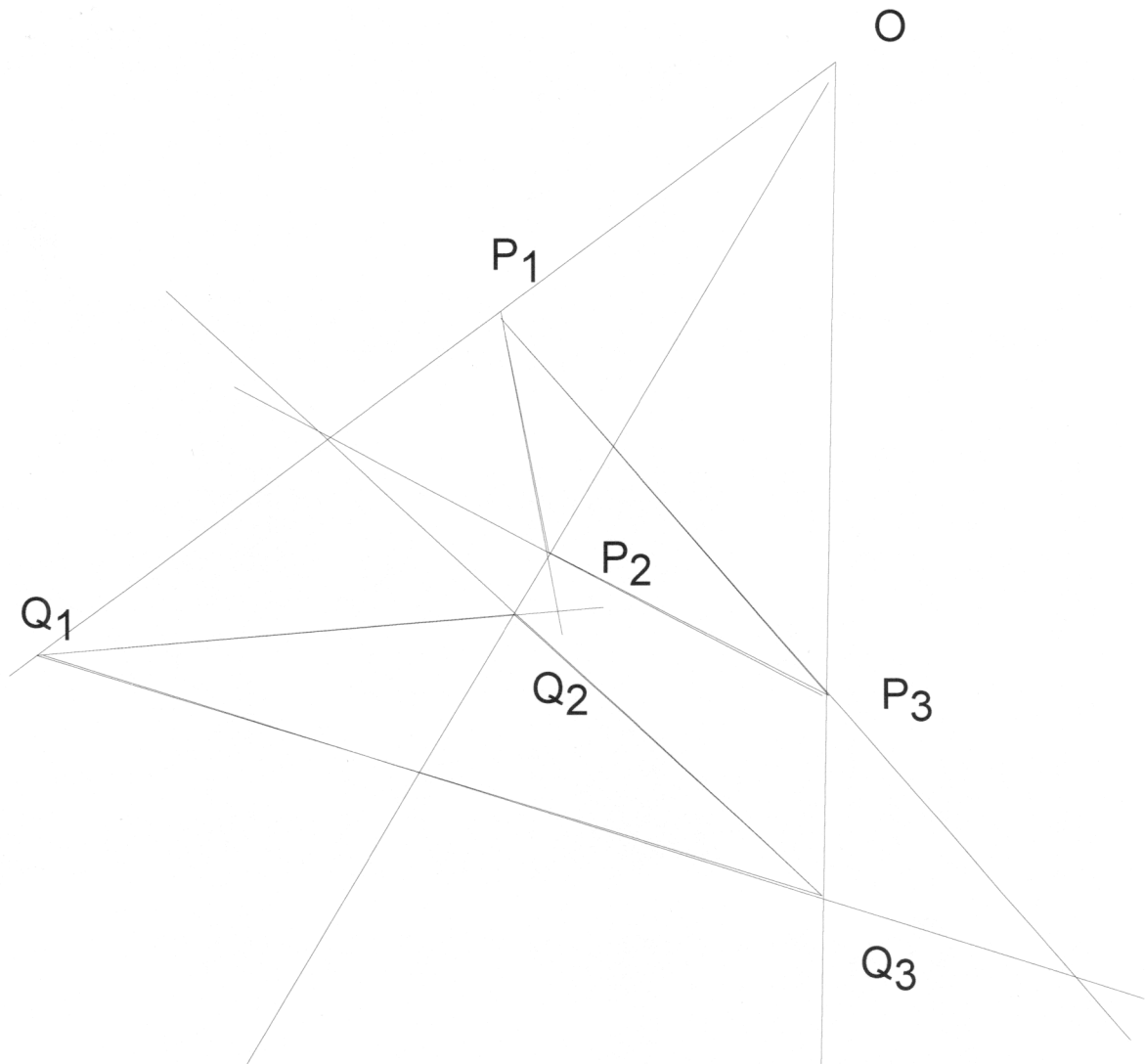


Figura 9.3: Il Teorema di Desargues



# Bibliografia

- [1] M. Artin. *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [2] S. Lang. *Algebra*, Springer GTM 211, 2002.