TOPOLOGIA - APPUNTI SETTIMANA 2/12/2013 - 5/11/2013

KIERAN G. O'GRADY - 2 DICEMBRE 2013

1. Spazi di Hausdorff

Definizione 1.1. Uno spazio topologico X è *di Hausdorff* se dati $x_1, x_2 \in X$ *distinti* esistono intorni U_1, U_2 di x_1 e x_2 rispettivamente che non si intersecano.

Quindi X è di Hausdorff se dati $x_1, x_2 \in X$ distinti esistono aperti disgiunti $U_1, U_2 \subset X$ contenenti x_1 e x_2 rispettivamente.

Esempi 1.2.

(1) Sia (X, d) uno spazio metrico provvisto della topologia metrica $\mathscr{T}_d$. Allora X è di Hausdorff. Infatti siano $x_1, x_2 \in X$ distinti. Allora $d(x_1, x_2) > 0$; sia $r := d(x_1, x_2)/2$. Le palle aperte $B(x_1, r)$ e $B(x_2, r)$ sono disgiunte e contegono x_1 e x_2 rispettivamente.

(2) Sia $\mathscr{T}_{scs}$ la topologia su $\mathbb{R}$ della semicontinuità superiore. Allora $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{scs})$ non è di Hausdorff. Infatti due qualsiasi aperti non vuoti di $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{scs})$ hanno intersezione non vuota.

(3) Siano A un insieme e $\mathbb{R}^A$ l'insieme delle funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$. Dato $a \in A$ sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^A & \xrightarrow{e_a} & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

l'applicazione di valutazione in a. Sia $\mathscr{T}_{punt}$ la topologia *meno fine* su $\mathbb{R}^A$ tale che e_a sia continua per ogni $a \in A$. Possiamo farci un'idea della topologia $\mathscr{T}_{punt}$ dandone una base. Dati $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mathbb{R}_+$ poniamo

$$U(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) := \{f \in \mathbb{R}^A \mid |f(a_i) - b_i| < \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n\}. \tag{1.1}$$

Siccome $U(a; b; \epsilon) = e_a^{-1}((b - \epsilon, b + \epsilon))$ è chiaro che $U(a; b; \epsilon) \in \mathscr{T}_{punt}$. D'altra parte

$$U(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = U(a_1; b_1; \epsilon_1) \cap \ldots \cap U(a_n; b_n; \epsilon_n)$$

e quindi $U(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \mathscr{T}_{punt}$. Inoltre è chiaro che la topologia meno fine che ha come aperti tutti i sottoinsiemi $U(f_1, \ldots, f_n; a_1, \ldots, a_n; r_1, \ldots, r_n)$ è uguale a $\mathscr{T}_{punt}$. Siccome la collezione degli $U(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ è una base, segue che è una bse per $\mathscr{T}_{punt}$. Si vede facilmente che $(\mathbb{R}^A, \mathscr{T}_{punt})$ è di Hausdorff.

Proposizione 1.3. *Se X e Y sono spazi topologici di Hausdorff allora il prodotto $X \times Y$ è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $(a, b) \neq (c, d) \in X \times Y$, quindi $a \neq c$ o $b \neq d$. Supponiamo che $a \neq c$. Siccome X è di Hausdorff esistono $U, V \subset X$ aperti *disgiunti* tali che $a \in U$ e $b \in V$. Allora $U \times Y$ e $V \times Y$ sono aperti disgiunti di $X \times Y$ che contengono (a, b) e (c, d) rispettivamente. □

Sia X un insieme; la *diagonale* è il sottoinsieme $\Delta_X \subset X \times X$ dei punti (x, x) dove x è un elemento arbitrario di X.

Proposizione 1.4. *Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ è chiusa (per la topologia prodotto).*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia di Hausdorff e dimostriamo che la diagonale è chiusa per la topologia prodotto. Sia $(a, b) \in (X \setminus \Delta_X)$, cioè $a \neq b$. Siccome X è di Hausdorff esistono aperti *disgiunti* $U, V \subset X$ tali che $a \in U$ e $b \in V$. Allora $U \times V$ è aperto in $X \times X$, contiene (a, b) e non interseca la diagonale perchè $U \cap V = \emptyset$. Ora supponiamo che la diagonale sia chiusa per la topologia prodotto e dimostriamo che X è di Hausdorff. Siano $a \neq b \in X$, cioè $(a,b) \in (X \setminus \Delta_X)$. Siccome la diagonale è chiusa $(X \setminus \Delta_X)$ è aperto, e per definizione di topologia prodotto esistono aperti $U, V \subset X$ tali che $(a,b) \in U \times V$ e $U \times V \subset (X \setminus \Delta_X)$, ovvero $U \cap V = \emptyset$. □

2. Primo assioma di numerabilità

Definizione 2.1. Sia X uno spazio topologico. Un *sistema fondamentale di intorni* di $x \in X$ è una collezione $\mathscr{V} \subset \mathscr{I}(x)$ di intorni di x tale che, dato un qualsiasi intorno U di x esiste $V \in \mathscr{V}$ contenuto in U.

Esempio 2.2. Sia (X,d) uno spazio metrico e $x \in X$. Un sistema fondamentale di intorni di $x \in X$ (dove X ha la topologia metrica) è dato da $B(x, 1/n)$ per $n \in \mathbb{N}_+$.

Definizione 2.3. Uno spazio topologico X soddisfa il *primo assioma di numerabilità* (o è *primo-numerabile*) se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile[1].

Esempi 2.4.
(1) Uno spazio metrico provvisto della topologia metrica è primo-numerabile, vedi **Esempio 2.2**.
(2) La topologia su $\mathbb{R}$ della semicontinuità superiore soddisfa il primo assioma di numerabilità.
(3) Sia A un insieme. La topologia $\mathscr{T}_{punt}$ su $\mathbb{R}^A$ (vedi **Esempi 1.2**) soddisfa il primo assioma di numerabilità se e solo se A è numerabile. Infatti sia A numerabile e $f\colon A \to \mathbb{R}$: un sistema fondamentale numerabile di intorni di f è dato dagli $U(a_1, \ldots, a_n; f(a_1), \ldots, f(a_n); \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ dove $n \in \mathbb{N}_+$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ sono arbitrari e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mathbb{Q}_+$. D'altra parte supponiamo che A non sia numerabile e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se esiste un sistema fondamentale numerabile di intorni di f allora ne esiste uno $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ dove per ogni m si ha che $V_m = U(\mathbf{a}_m; \mathbf{b}_m; \epsilon_m)$ dove $\mathbf{a}_m \in A^{n(m)}$, $\mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^{n(m)}$, $\epsilon_m \in \mathbb{R}_+^{n(m)}$ e $n(m) \in \mathbb{N}_+$. Siccome A non è numerabile eiste $c \in A$ che non è uguale ad alcuna delle entrate di $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \ldots$. Allora $U(c; f(c); 1)$ è un intorno di f che non è contenuto in alcuno dei V_m, contraddizione. Notate che $(\mathbb{R}^A, \mathscr{T}_{punt})$ è di Hausdorff come ogni spazio topologico metrizzabile, ma se A non è numerabile allora *non* è metrizzabile non essendo primo-numerabile (vedi il primo punto).
(4) La topologia *conumerabile* $\mathscr{T}_{conum}$ su un insieme X è quella in cui $C \subset X$ è chiuso se è numerabile oppure è uguale a X. Se X è numerabile $\mathscr{T}_{conum}$ è la topologia discreta e quindi soddisfa il primo assioma di numerabilità (un sistema fondamentale di introni di x è dato da $\{x\}$). Se invece X non è numerabile allora $\mathscr{T}_{conum}$ *non* soddisfa il primo assioma di numerabilità. Infatti sia $x \in X$ e supponiamo che esista un sistema fondamentale numerabile $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di intorni di x. Allora $C_n := (X \setminus U_n)$ è un chiuso di X che non è tutto X, quindi è numerabile. Il sottoinsieme $\{x\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ è numerabile (è unione numerabile di numerabili), e quindi esiste $y \in (X \setminus \{x\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n)$ perchè X non è numerabile. Il complementare di $\{y\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, chiamiamolo V, è aperto e contiene $\{x\}$, quindi è un intorno di x. Sia $n \in \mathbb{N}$: per costruzione $(X \setminus U_n) \not\supset (X \setminus V)$ e quindi $U_n \not\subset V$, contraddizione.

Proposizione 2.5. *Se X e Y sono spazi topologici che soddisfano il primo assioma di numerabilità allora anche il prodotto $X \times Y$ soddisfa il primo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione. Sia $(a,b) \in X \times Y$. Per ipotesi esitono sistemi fondamentali di intorni numerabili $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ di $a \in X$ e $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di $b \in Y$: allora $\{U_m \times V_n\}_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile di $(a,b) \in X \times Y$. □

[1]Per noi un insieme S è numerabile se esiste un'applicazione suriettiva $\varphi\colon \mathbb{N} \to S$, oppure S è vuoto. Quindi un insieme finito è numerabile.

3. Primo assioma di numerabilità e successioni

Nello spazio topologico $\mathbb{R}^n$ la chiusura di un sottoinsieme A è uguale all'insieme dei punti limite di successioni di punti di A. Analogamente una $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $a \in \mathbb{R}^n$ se per ogni successione $x_n \to a$ si ha che $f(x_n) \to f(a)$. Dimostreremo che se se si sostituisce $\mathbb{R}^n$ con uno spazio topologico primo-numerabile valgono le stesse affermazioni, e che senza l'ipotesi di prima-numerabilità possono essere false.

Lemma 3.1. *Siano X uno spazio topologico e $x \in X$. Se esiste un sistema fondamentale numerabile di intorni di x allora ne esiste uno, diciamo $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (diciamo che un tale sistema di intorni è* decrescente*).*

Dimostrazione. Sia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un insieme fondamentale numerabile di intorni di x. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $U_n := V_0 \cap V_1 \cap \ldots \cap V_n$; notate che $V_1^0 \cap \ldots \cap V_n^0$ (l'intersezione delle parti interne di $V_0, \ldots, V_n$) è un aperto contenuto in U_n e contenente x, quindi U_n è un intorno di x. Inoltre $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni perchè $U_n \subset V_n$ per ogni n, ed è chiaro che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Proposizione 3.2. *Sia X uno spazio topologico che soddisfa il primo assioma di numerabilità. Sia $A \subset X$. Allora $x \in X$ appartiene alla chiusura $\overline{A}$ se solo se esiste una successione $\{a_n\}$ di punti di a tale che $a_n \to x$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista una successione $\{a_n\}$ di punti di a tale che $a_n \to x$. Sia U un intorno aperto di x. Allora $a_n \in U$ per $n >> 0$, in particolare $U \cap A \neq \emptyset$. Questo dimostra che $x \in \overline{A}$ perchè se x non gli appartenesse allora $(X \setminus \overline{A})$ sarebbe un aperto contenente x che non interseca A. (Questa affermazione vale senza ipotesi di prima-numerbilità.) Ora supponiamo che $x \in \overline{A}$. Per il **Lemma 3.1** esiste un sistema fondamentale numerabile $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di intorni di x tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $x \in \overline{A}$ esiste $a_n \in U_n \cap A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostreremo che la successione $\{a_n\}$ di punti di A converge a x. Sia V un intorno di x: siccome $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di x esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \subset V$, e siccome $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ segue che $a_n \in V$ per $n \geq n_0$. □

Esempio 3.3. Sia X un insieme *non numerabile*, e dotiamolo della topologia conumerabile, vedi **Esempi 2.4**. Sia $\{x_n\}$ una successione in X e supponiamo che $x_n \to y$. Allora $x_n = y$ per $n \gg 0$. Da questo segue che *non* è vero che la chiusura di un sottoinsieme $A \subset X$ è uguale all'insieme dei limiti di punti di A.

Proposizione 3.4. *Sia X uno spazio topologico che soddisfa il primo assioma di numerabilità. Siano $f\colon X \to Y$ un'applicazione da X a uno spazio topologico Y, e $a \in X$. La f è continua in a se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di X che converge ad a la successione $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$.*

Dimostrazione. Il "solo se" vale senza alcuna ipotesi di prima-numerabilità, lasciamo la dimostrazione al lettore. Ora supponiamo che per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di X che converge ad a la successione $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$, e dimostriamo che f è continua in a. Assumiamo per assurdo che la f *non* sia continua in a. Allora esiste un intorno $V \subset Y$ di $f(a)$ tale che $f^{-1}V$ non è un intorno di a. Per il **Lemma 3.1** esiste un sistema fondamentale numerabile $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di intorni di a tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi esiste $a_n \in U_n \setminus f^{-1}V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione $\{a_n\}$ converge ad a perchè $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme fondamentale decrescente di intorni di a. Per ipotesi segue che $f(a_n) \to f(a)$ e quindi $f(a_n) \in V$ per $n \gg 0$, ovvero $a_n \in f^{-1}V$, e questa è una contraddizione. □

Esempio 3.5. Sia X un insieme *non numerabile*, e dotiamolo della topologia conumerabile, vedi **Esempi 2.4**. Siano $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. L'**Esempio 3.3** mostra che per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di X che converge ad a la successione $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$ (indipendentemente dalla f), in particolare f può ben essere *non* continua in $a \in X$.

4. Connessione per archi

Un teorema ben noto di Analisi afferma che una funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Ci chiediamo per quali spazi topologici X si può affermare che vale un analogo risultato, e cioè che se $f\colon X \to \mathbb{R}$ allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Definizione 4.1. Uno spazio topologico X è *connesso per archi* se, dati comunque $x_1, x_2 \in X$ esistono $a < b \in \mathbb{R}$ e $\gamma\colon [a,b] \to X$ *continua* tali che $\gamma(a) = x_1$ e $\gamma(b) = x_2$.

Esempio 4.2. $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi: basta definire $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ come $\gamma(t) := x + t(y-x)$.

Osservazione 4.3. Siano X uno spazio topologico connesso per archi e $x_1, x_2 \in X$. Dati comunque $c < d \in \mathbb{R}$ esiste $\delta\colon [c,d] \to X$ *continua* tale che $\delta(c) = x_1$ e $\delta(d) = x_2$. Infatti sia $\gamma\colon [a,b] \to X$ come nella **Definizione 4.1**: basta porre

$$\delta(t) := a + \frac{b-a}{d-c}(t-c), \quad t \in [c,d].$$

Proposizione 4.4. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (con la topologia indotta) è connesso per archi se e solo se è un intervallo.*

Dimostrazione. È chiaro che un intervallo è connesso per archi. Ora supponiamo che $X \subset \mathbb{R}$ sia connesso per archi: va dimostrato che se $c < d \in X$ allora $[c,d] \subset X$. Per ipotesi esistono $a < b \in \mathbb{R}$ e $\gamma\colon [a,b] \to X$ continua tali che $\gamma(a) = c$ e $\gamma(b) = d$. L'applicazione $\widetilde{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ottenuta componendo γ e l'inclusione $X \hookrightarrow \mathbb{R}$ è continua. Dal Teorema di Analisi che abbiamo menzionato segue che $\gamma([a,b]) \supset [c,d]$ (ricordiamo che se $y \in [c,d]$ allora l'estremo superiore degli $x \in [a,b]$ tali che $f(x) \leq y$ è tale che $f(x) = y$), e siccome $\operatorname{Im}\gamma \subset X$ segue che $[c,d] \subset X$. □

Proposizione 4.5. *Siano X, Y spazio topologici e $f\colon X \to Y$ continua e suriettiva. Se X è connesso per archi allora Y è connesso per archi.*

Dimostrazione. Siano $y_1, y_2 \in f(X)$ e siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Per ipotesi esistono $a < b \in \mathbb{R}$ e $\gamma\colon [a,b] \to X$ *continua* tali che $\gamma(a) = x_1$ e $\gamma(b) = x_2$. La composione $f \circ \gamma\colon [a,b] \to Y$ è continua e $f \circ \gamma(a) = y_1$, $f \circ \gamma(b) = y_2$. □

Corollario 4.6. *Siano X uno spazio topologico connesso per archi e $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(X)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Sia $Y := f(X)$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$. L'applicazione $\widetilde{f}\colon X \to Y$ definita ponendo $\widetilde{f}(x) := f(x)$ è continua. Siccome X è connesso per archi anche Y è connesso per archi (**Proposizione 4.5**), e quindi $f(X)$ è un intervallo per la **Proposizione 4.4**. □

Esempio 4.7. Sia $n \geq 1$ un naturale: dimostriamo che la sfera S^n è connessa per archi. L'applicazione continua

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \tag{4.2}$$

è suriettiva. Siccome $\mathbb{R}$ è connesso per archi segue dalla **Proposizione 4.5** che S^1 è connesso. Ora dimostriamo che S^n è connesso per $n \geq 2$. Siano $p, q \in S^n$. Esiste un piano $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$ che contiene $\mathbf{0}$, p e q: la sua intersezione con S^n è omeomorfa a S^1 e quindi esiste $\gamma\colon [a,b] \to (\Lambda \cap S^n)$ continua tale che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

Faremo uso delle connessione per archi per dare qualche risposta alla domanda: ha senso definire la *dimensione* di uno spazio topologico? Ci aspettiamo che se esiste una definizione sensata di dimensione (in particolare spazi omeomorfi dovranno avere la stessa dimensione), allora $\mathbb{R}^n$ avrà dimensione n, e quindi $\mathbb{R}^m$ *non* è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se $m \neq n$. A questo proposito ricordiamo che la *curva di Peano* è un'applicazione *continua e suriettiva*

$$f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$$

ottenuta come limite di $f_n : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ continue (ma non suriettive!) la cui immagine "invade " gradualmente tutto il quadrato, vedi la Figura (1). L'esistenza di una tale f fa capire

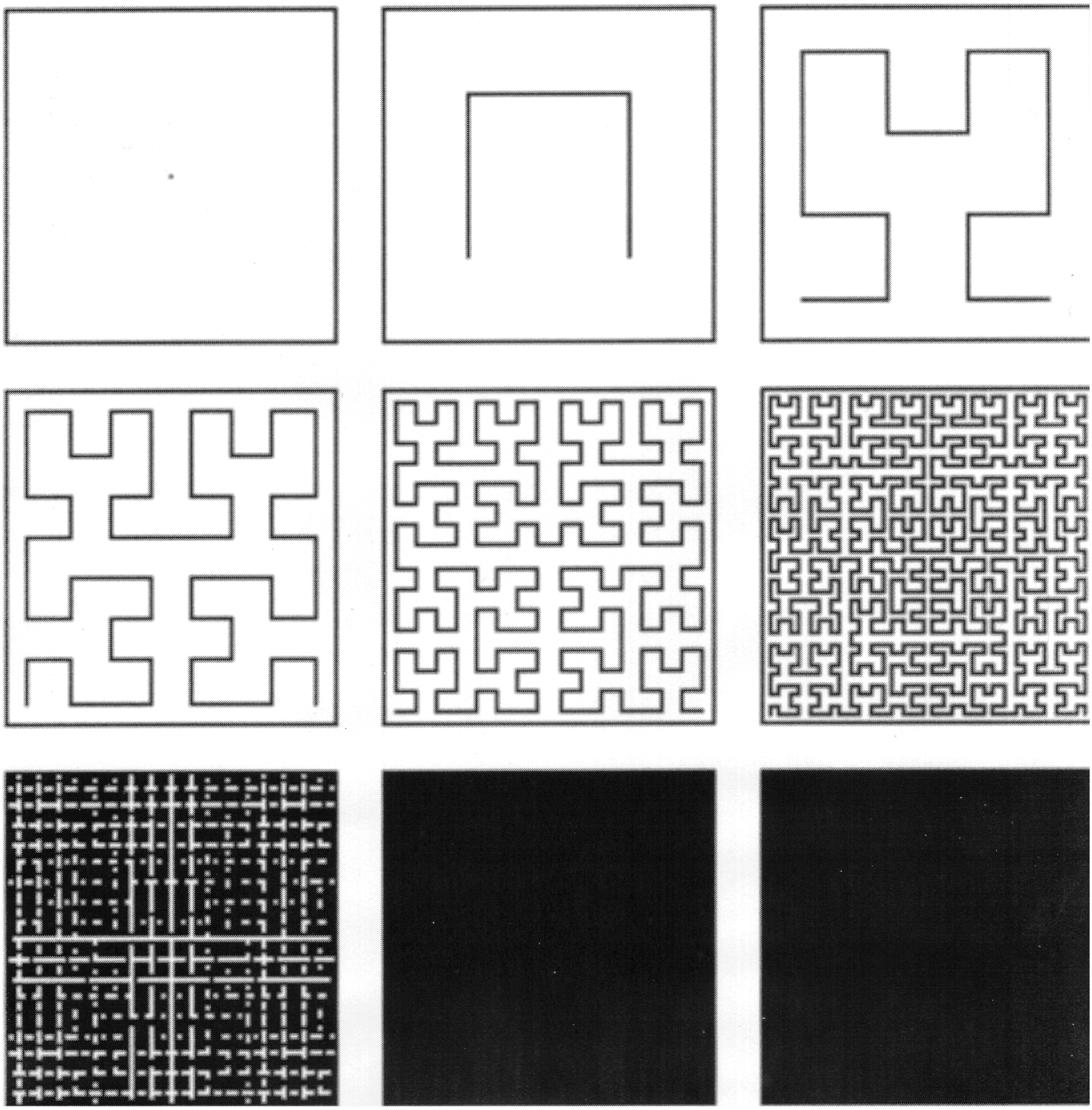

FIGURA 1. La curva di Peano come limite

che non è facile dimostrare che $\mathbb{R}^m$ *non* è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se $m \neq n$, o (teorema di Brouwer) che se $m \neq n$ allora aperti non vuoti di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ non sono omeomorfi. Ci limiteremo a dimostrare questo risultato per $m = 1$.

Lemma 4.8. *Sia $n \geq 2$ un naturale e $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto connesso per archi. Sia $p \in U$: allora $(U \setminus \{p\})$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. Siano $q, r \in (U \setminus \{p\})$: va dimostrato che esiste $\sigma\colon [a,b] \to (U \setminus \{p\})$ continua tale che $\sigma(a) = q$ e $\sigma(b) = r$. Siccome U è connesso per archi esiste $\gamma\colon [a,b] \to U$ continua tale che $\gamma(a) = q$ e $\gamma(b) = r$. Se $p \notin \operatorname{Im}\gamma$ non c'è nulla da dimostrare, quindi supponiamo che $p \in \operatorname{Im}\gamma$. Siccome U è aperto esiste $\epsilon > 0$ tale che $\overline{B}(p,\epsilon) \subset U$ (nota: la *chiusura* della palla di centro p e raggio ϵ). Scegliendo ϵ sufficientemente piccolo possiamo supporre che $q, r \notin \overline{B}(p,\epsilon)$. Siccome γ è continua $\gamma^{-1}\overline{B}(p,\epsilon)$ è chiuso in $[a,b]$: siano

$$c := \inf\{x \in \gamma^{-1}\overline{B}(p,\epsilon)\}, \qquad d := \sup\{x \in \gamma^{-1}\overline{B}(p,\epsilon)\}.$$

Siccome $\gamma^{-1}\overline{B}(p,\epsilon)$ è chiuso si ha che $c, d \in \gamma^{-1}\overline{B}(p,\epsilon)$, e inoltre si verifica facilmente che

$$c, d \in \gamma^{-1}\partial B(p,\epsilon) = \gamma^{-1}\{z \in \mathbb{R}^n \mid d(z,p) = \epsilon\}.$$

Ora $\partial B(p,\epsilon)$ è chiaramente omeomorfo a S^{n-1}, che è connesso per archi perchè $n \geq 2$ (vedi l'**Esempio 4.7**). Quindi esiste $\delta\colon [c,d] \to \partial B(p,\epsilon)$ continua tale che $\delta(c) = \gamma(c)$ e $\delta(d) = \gamma(d)$ (vedi l'**Osservazione 4.3**). Definiamo $\sigma\colon [a,b] \to (U \setminus \{p\})$ ponendo

$$\sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t < c, \\ \delta(t) & \text{se } c \leq t < d, \\ \gamma(t) & \text{se } d \leq t \leq b. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che σ è continua. □

Proposizione 4.9. *Siano $U \subset \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ aperti non vuoti, e $n \geq 2$. Allora U non è omeomorfo a V.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un omeomorfismo $f\colon U \to V$. Siccome U è aperto esistono $a < b \in \mathbb{R}$ tali che $(a,b) \subset U$. Ora (a,b) è aperto in U (per la topologia indotta) e siccome f è un omeomorfismo segue che $f(U)$ è un aperto di V (per la topologia indotta), ma siccome V è aperto in $\mathbb{R}^n$ ne segue che $W := f(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$: quindi la restrizione di f a (a,b) definisce un omeomorfismo $g\colon (a,b) \to W$ dove $W \subset \mathbb{R}^n$ è aperto. Siccome (a,b) è connesso per archi anche W è connesso per archi. Sia $c := (a+b)/2$: allora $((a,b) \setminus \{c\})$ *non* è connesso per archi (vedi la **Proposizione 4.4**). D'altra parte $(W \setminus g(c))$ è connesso per archi per il **Lemma 4.8**. Ma allora la restrizione di g a $((a,b) \setminus \{c\})$ definisce un omeomorfismo tra $((a,b) \setminus \{c\})$, che non è connesso per archi, e $(W \setminus g(c))$, che è è connesso per archi, questa è una contraddizione. □