Geometria (LT Fisica)

Anno accademico 2017/18 - Canale D-K

Esercizi del 12 dicembre 2017

Esercizio 1. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi W dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ siano sottospazi vettoriali.

(a) $V = \mathbb{K}[t]_{\leq d}$ e $W = \{p \in V \,|\, p(0) = 0\}$

(b) $V = \mathbb{K}[t]_{\leq d}$ e $W = \{p \in V \,|\, p(1) = 0\}$

(c) $V = \mathbb{K}[t]_{\leq d}$ e $W = \{p \in V \,|\, p(0) = 1\}$

(d) $V = \mathbb{K}[t]_{\leq d}$ e $W = \{p \in V \,|\, p(0) = p(1)\}$

(e) $V = \mathbb{K}[t]_{\leq d}$ e $W = \{p \in V \,|\, p(0)p(1) = 0\}$

(f) $V = \mathbb{K}[t]$ e $W = \{p \in V \,|\, \deg(p) = n-1\} \cup \{0\}$

(g) $V = \mathbb{K}[t]$ e $W = \{p \in V \,|\, \deg(p) \geq n-1\} \cup \{0\}$

(h) $V = \mathbb{K}[t]_{\leq d}$ e $W = \{p \in V \,|\, p'(1) = 0\} \cup \{0\}$, dove $p'(t) = \frac{dp}{dt}$

(f) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \right\}$

(g) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{ x \in \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1^2 + x_3^2 = 0 \right\}$

(h) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{ x \in \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Nei casi (a-b-c-d-e-f-g-h) in cui W sia un sottospazio vettoriale, determinare una base di W.

Esercizio 2. Siano U, W sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V. Dimostrare che le seguenti condizioni (i-iv) sono equivalenti:

(i) $U \subseteq W$

(ii) $U \cap W = U$

(iii) $U + W = W$

(iv) $W \cap (Z + U) = (W \cap Z) + U$ per ogni sottospazio vettoriale Z di V.

Esercizio 3 (Poco più difficile)**.** Sia $V \subseteq \mathbb{K}[t]$ un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbb{K}[t]$. Dimostrare che esiste una successione infinita $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ di vettori in V che verifichi le tre proprietà seguenti:

(i) per ogni $n > 0$, il vettore v_n è un polinomio di grado $\geq n$;

(ii) i vettori $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$ sono linearmente indipendenti;

(iii) i vettori $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$ generano V.

(E dunque $(v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ è una base di V!)

Esercizio 4. Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e sia $V \times W$ l'insieme delle coppie (v, w), al variare di $v \in V$ e $w \in W$. Dati $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$, definiamo una somma su $V \times W$ come

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$

(dove $v_1 + v_2$ è la somma in V e $w_1 + w_2$ è la somma in W) e un prodotto per scalare come

$$\lambda \cdot (v, w) := (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(v, w) \in V \times W$ (dove $\lambda \cdot v$ è il prodotto per scalare in V e $\lambda \cdot w$ è il prodotto per scalare in W).

(a) Dimostrare che, con le operazioni definite sopra, $V \times W$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (detto *spazio vettoriale prodotto di V con W*).

(b) Calcolare la dimensione di $V \times W$ in funzione delle dimensioni di V e di W.

(c) Dimostrare che $V \times \{0_W\} = \{(v, 0_W) \in V \times W \mid v \in V\}$ e $\{0_V\} \times W = \{(0_V, w) \in V \times W \mid w \in W\}$ sono sottospazi vettoriali di $V \times W$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato e siano U, W sottospazi vettoriali di V. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(a) $V = U \oplus W$

(b) Esistono una base $(u_1, \ldots, u_m)$ di U e una base $(w_1, \ldots, w_n)$ di W tali che $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ sia una base di V.

(c) Per ogni base $(u_1, \ldots, u_m)$ di U e per ogni base $(w_1, \ldots, w_n)$ di W, l'insieme ordinato $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ è una base (ordinata) di V.

(d) $U \cap W = \{0\}$ e $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$

(e) $U + W = V$ e $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$.

Esercizio 6. Scriviamo la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ nella forma seguente

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A_{k,k} & B_{k,n-k} \\ \hline C_{n-k,k} & D_{n-k,n-k} \end{array}\right)$$

dove $A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{K})$ e $D \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{K})$.

(a) Assumiamo $C = 0$. Dimostrare che $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

(b) Assumiamo $B = 0$. Dimostrare che $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

(c) Mostrare che, se $B, C \neq 0$, può aversi $\det(M) \neq \det(A)\det(D)$.

Esercizio 7. Siano $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$ e $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ generati da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base di U, una base di W e una base di $U + W$.
[Può essere utile usare la riduzione a scala.]
Che dimensione ha $U \cap W$? Riuscite a trovarne una base?