Geometria (LT Fisica)

Anno accademico 2017/18 - Canale D-K

Esercizi del 4 dicembre 2017

Esercizio 1. Calcolare i determinanti $\det(A)$ e $\det(B)$ delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a coefficienti reali.

Esercizio 2. Calcolare determinanti $\det(C)$ e $\det(D)$ delle seguenti matrici a coefficienti complessi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\omega = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$.

Esercizio 3. Siano $a_0, a_1, \dots, a_n$ parametri in un campo $\mathbb{K}$ e sia x una indeterminata. Calcolare il seguente determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

come polinomio nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Esercizio 4. Calcolare il seguente determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ b & 0 & 1 & a \\ c & e & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in funzione dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. I numeri interi 2418, 1395, 8091, 8339 sono divisibili per 31. Dimostrare senza effettuare il conto esplicito che il determinante $\det(M)$ della seguente matrice a coefficienti interi

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \\ 8 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

è divisibile per 31.

Esercizio 6. Una *permutazione* di n elementi è una applicazione biiettiva $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$. Denotiamo con $\mathfrak{S}_n$ l'insieme delle permutazioni di n elementi e con id la permutazione "identità".

(a) Dimostrare che:

(a1) se $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, allora $\sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}_n$ (ossia, $\mathfrak{S}_n$ *è chiuso per composizione*);

(a2) $\sigma \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (ossia, id *è neutro per la composizione*);

(a3) se $\rho, \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, allora $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$ (ossia, *la composizione è associativa*);

(a4) se $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, allora $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ (ossia, $\mathfrak{S}_n$ *contiene l'inverso di ogni suo elemento*).

Poiché verifica (a1-a2-a3-a4), diremo che $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ è un "gruppo".

(b) Sia $M_\sigma \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice la cui colonna j-esima M^j è data dal vettore $e_{\sigma(j)}$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che M_σ è invertibile e che $\det(M_\sigma) = \pm 1$.
Chiamiamo $\varepsilon(\sigma) := \det(M_\sigma)$ il "segno di σ".

(c) Dimostrare che $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$ e $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

(d) Dimostrare che, se σ è una "trasposizione" (ossia scambia esattamente due elementi di $\{1, 2, \dots, n\}$ e manda tutti gli altri in sé), allora $\varepsilon(\sigma) = -1$.

(e) Dimostrare che ogni $\tau \in \mathfrak{S}_n$ è una composizione di un certo numero di trasposizioni.
Concludere che, se τ è una composizione di k trasposizioni, allora $\varepsilon(\tau) = (-1)^k$.

Esercizio 7 (Più difficile)**.** Si consideri la funzione $F : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)}.$$

Dimostrare che l'applicazione F soddisfa le proprietà (A-B-C-D) e quindi coincide con il determinante.
[Se F soddisfa le proprietà (B-C) si dice "multilineare", se soddisfa (A) di dice "alterna".]

Esercizio 8. Una matrice quadrata A di dice "simmetrica" se $A = A^T$ e "antisimmetrica" se $A = -A^T$ (dove A^T è la trasposta di A, definita scambiando i ruoli di righe e colonne).
Dimostare che il determinante di una matrice antisimmetrica a coefficienti complessi di ordine 351 è nullo.