Geometria (LT Fisica) - Canale D-K

Esercizi (2 novembre 2017)

Sia $d_n : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ una funzione con le proprietà seguenti:

(1) se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ha due colonne uguali, allora $d_n(A) = 0$;

(2) se $A, A' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $A' = \left(A^1|A^2|\cdots|\lambda A^j|\cdots|A^n\right)$ si ottiene da $A = \left(A^1|A^2|\cdots|A^j|\cdots|A^n\right)$ moltiplicando la sua colonna j-esima per $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $d_n(A') = \lambda \cdot d_n(A)$;

(3) se $A = \left(A^1|A^2|\cdots|A^{j-1}|B' + B''|A^{j+1}|\cdots|A^n\right)$ con $B', B'' \in \mathbb{K}^n$, allora $d_n(A) = d_n(A') + d_n(A'')$, dove $A' = \left(A^1|A^2|\cdots|A^{j-1}|B'|A^{j+1}|\cdots|A^n\right)$ e $A'' = \left(A^1|A^2|\cdots|A^{j-1}|B''|A^{j+1}|\cdots|A^n\right)$.

(4) $d_n(I_n) = 1$.

Esercizio 1. Calcolare $d_3(A)$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, e dire se $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia biiettiva.

Esercizio 2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare $d_3(B)$ e dire se l'applicazione $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ indotta dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} t+2 & 1 & 1 \\ 1-2t & t^2-1 & 0 \\ 2t+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sia biiettiva. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ calcolare inoltre un insieme minimale di generatori per l'immagine di L_B.

Esercizio 3. (a) Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Dimostrare che $d_n(\lambda A) = \lambda^n d_n(A)$.

(b) Per ogni $n \geq 2$, trovare matrici $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tali che $d_n(A + B) \neq d_n(A) + d_n(B)$.

(c) Sia $h < n$ e sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice "a blocchi", ossia una matrice del tipo

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & R \end{array}\right)$$

con $P \in \mathcal{M}_{h\times h}(\mathbb{K})$, $R \in \mathcal{M}_{(n-h)\times(n-h)}(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{M}_{h\times(n-h)}(\mathbb{K})$ e dove O è la matrice nulla con $(n-h)$ righe e h colonne. Dimostrare che $d_n(A) = d_h(P)d_{n-h}(R)$.

Esercizio 4. Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che

$$d_3(A) = 1, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $d_3(B)$, $d_3(C)$ e $d_3(D)$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 3x & 1/2 & 0 \\ 3y & 1/2 & 1 \\ 3z & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 2x & 1 \\ y & 1+2y & 2 \\ z & 3+2z & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x & 2+2x & 1 \\ y & 2+2y & 0 \\ z & 4+2z & -1 \end{pmatrix}.$$