LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 7 di esercizi - 18 novembre 2016

(consegna giovedì 24 novembre 2016)

Esercizio 1. Sia $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Riducete A a scala per righe.
(b) Riducete A a scala per colonne.
(c) Calcolate il rango di A.

Esercizio 2. Sia $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per esercizio Pierino ha ridotto B a scala per righe, e ha ottenuto la matrice

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e poi ha ridotto B a scala per colonne, ottenendo la matrice

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In uno dei due esercizi Pierino ha sbagliato: determinate quale sia la risposta sbagliata.

Esercizio 3. Determinate per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ammette soluzioni $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Calcolate l'inversa della matrice (invertibile) $D \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ definita come

$$D := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. Una matrice quadrata T si dice *nilpotente* se esiste $k > 0$ tale che $T^k = 0$.

(a) Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ data da $A = 1_n + T$, dove 1_n è la matrice unità $n \times n$, e $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ è nilpotente, con $T^k = 0$. Dimostrate che A è invertibile e che

$$A^{-1} = 1_n - T + T^2 - \ldots + (-1)^{k-1} T^{k-1}.$$

(b) Sia $E \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

in altre parole $E_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i, i+1 \\ 1 & \text{se } j = i \text{ oppure } j = i+1. \end{cases}$

Calcolate E^{-1}.

Esercizio 6. Siano $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice di rango $(n-1)$ e sia φ l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}). \\ A & \mapsto & M \cdot A \end{array}$$

Determinate il rango di φ.
