Geometria (LT Fisica)

Proff. A. D'Andrea, A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady

Prova scritta - 7 febbraio 2017

Nome e Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: ______________________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: [ ]

Esercizio 1. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$\begin{aligned} U &:= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ V &:= \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

(a) Date basi di U e V.

(b) Determinate se U e V siano spazi vettoriali isomorfi.

Risoluzione:

Risposte: Base di U: | Base di V:

U e V sono isomorfi? (sì/no)

Esercizio 2. Sia

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

e supponiamo che $\operatorname{Det} A = 5$. Sia $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ definita da

$$B := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{13} & a_{12} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{22} + a_{23} - 3a_{12} - 3a_{13} & a_{22} - 3a_{12} \\ a_{31} & a_{32} + a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Calcolate $\operatorname{Det} B$.

Risoluzione:

Risposta: $\operatorname{Det} B = \boxed{}$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}^2$ il piano affine euclideo e siano dati i punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivete, nella forma $f(X) = A \cdot X + b$, un'affinità $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $f(P_i) = P_i'$ per $i = 1, 2, 3$.

(b) Dite se l'affinità f sia una isometria del piano euclideo (rispetto alla distanza euclidea standard).

Risoluzione:

Risposta: $A =$ | $b =$ | f è una isometria? (sì/no)

Esercizio 4. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinate $P \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile e $D \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ diagonale tali che $A = PDP^{-1}$.

Risoluzione:

Risposta: $P = \boxed{}$ $D = \boxed{}$

Esercizio 5. Siano

$$A := \begin{bmatrix} 18 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & 6 \\ -6 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

e $q(X) := X^t \cdot A \cdot X$ l'associata forma quadratica su $\mathbb{R}^3$. Determinate una base ortonormale (per il prodotto scalare euclideo standard su $\mathbb{R}^3$) che diagonalizzi q.

Risoluzione:

Risposta: Base ortonormale che diagonalizza q: