# Geometria differenziale

Anno accademico 2018/19

## Appello straordinario (6 novembre 2018)

*Cognome:* ______________________________

*Nome:* ______________________________

*Numero di matricola:* ______________________

| Esercizio | Punti totali | Punteggio |
|---|---|---|
| 1 | 10 | |
| 2 | 9 | |
| 3 | 12 | |
| Totale | 31 | |

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà* 0 *punti.*

*Verrà corretto* **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

**Voto/30:** 

**Esercizio 1.** Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare definita su un intervallo aperto $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ e tale che $\tau_\gamma(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

(a) Dimostrare che, se $\theta : I \to \mathbb{R}$ soddisfa $\dot\theta(t) \neq 0$ per ogni $t$, allora $\alpha(t) = \left(\frac{a}{c}\int_0^t \sin(\theta(u))du,\ \frac{a}{c}\int_0^t \cos(\theta(u))du,\ \frac{b}{c}t\right)$ con $a^2 + b^2 = c^2$ è un'elica. Calcolare $\kappa_\alpha/\tau_\alpha$.

(b) Dimostrare che $\gamma$ è un'elica se e solo se le rette $s \mapsto \gamma(t) + sN(t)$ sono tutte parallele ad un piano fissato (ossia indipendente da $t$).

(c) Dimostrare che $\gamma$ è un'elica se e solo se esiste un vettore non nullo fissato (ossia indipendente da $t$) con cui le rette $s \mapsto \gamma(t) + sB(t)$ formino un angolo costante (ossia indipendente da $t$).

(d) Dimostrare che $\gamma$ è un'elica se e solo se il rapporto $\kappa_\gamma/\tau_\gamma$ è costante (ossia indipendente da $t$).

*(Una curva regolare $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ si dice un'***elica** *se esiste un vettore $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ tale che $\dot\gamma(t)$ forma un angolo costante con $v$.)*

**Risoluzione**:

**Esercizio 2.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto connesso e sia $\sigma : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una superficie liscia e regolare. Denotiamo con $(u, v)$ le coordinate standard su $\mathbb{R}^2$ e con $N$ un campo di vettori normali unitari su $S$.

(a) Supponiamo che ogni punto di $S$ sia ombelicale. Dimostrare che $\kappa_1 = \kappa_2$ è costante su $S$ e dimostrare quindi che $S$ è una porzione di piano oppure di sfera.
*(Suggerimento: studiare la quantità $\partial^2_{uv} N$.)*

(b) Supponiamo che la mappa di Gauss $N : S \to S^2$ sia conforme. Concludere che $S$ è una porzione di sfera, oppure $S$ è una superficie minima.

(c) Dimostrare che $\sigma(u, v) = \left( \frac{\cos(u)}{\cosh(v)}, \frac{\sin(u)}{\cosh(v)}, \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)} \right)$ definita su $\Omega = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ è la parametrizzazione di una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Dire inoltre se essa sia una porzione di piano, di sfera, una superficie minima oppure nessuna di queste.

**Risoluzione**:

**Esercizio 3.** Considerare il paraboloide $S = \left\{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right\}$ in $\mathbb{R}^3$, con $a, b > 0$.

(a) Calcolare la curvatura gaussiana di $S$ e mostrare che ogni isometria di $S$ in sé manda $O$ in $O$.

(b) Mostrare che le quattro applicazioni $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$ sono isometrie di $S$ in sé.

(c) Dimostrare che le geodetiche $\gamma$ su $S$ con $\gamma(0) = O$ sono del tipo $\gamma(t) = t\dot{\gamma}(0) + o(t^2)$ e calcolare $\frac{d^2}{dt^2} K_{\gamma(t)}\Big|_{t=0}$ per tali geodetiche.

(d) Supponiamo $a > b$. Dimostrare che, vista nelle coordinate $(u, v)$, ogni isometria $f : S \to S$ in sé soddisfa $df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Concludere che $f$ è del tipo visto in (b).

**Risoluzione**: