Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esempio di prova scritta - 14 gennaio 2013

Esercizio 1.

(a) Mostrare che una superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$ ammette sempre una parametrizzazione locale tale $\sigma(u,v)$ tale che $E = E(v)$, $F = 0$ e $G = 1$.

(b) Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare con $\kappa(t) > 0$ per ogni $t \in (a,b)$. Sia $\sigma(u,v) := \gamma(u) + v\hat{n}$, dove $\hat{n}$ è il vettore normale unitario. Dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\sigma((-\varepsilon,\varepsilon) \times (a,b))$ è una superficie regolare e calcolarne la prima forma fondamentale in funzione di curvatura e torsione di γ.

Esercizio 2.

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $f : S \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y,z) = z$. Sia $p \in S$ è un punto critico per f.
Dimostrare che gli $\det(\mathrm{Hess}(f)_p)$ ha lo stesso segno di K_p.

Esercizio 3.

Sia $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}[t]_n$ la mappa che assegna a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ il polinomio monico con radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Calcolare luogo e valori critici di P.

Esercizio 4.

(a) Mostrare che la curva $\beta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$\beta(t) := \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t} \right)$$

è in effetti planare.

(b) Sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare in parametro d'arco e supponiamo che la sua curvatura $\kappa(t)$ sia non nulla per ogni $t \in (a,b)$. Definiamo una nuova curva $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ come

$$\alpha(t) := \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

Mostrare che α è regolare. Se s è un parametro d'arco per α, dimostrare che $ds/dt = \kappa$ ed esprimere la curvatura di α in funzione di curvatura κ e torsione τ di γ.