Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Prova scritta - 9 settembre 2013

Esercizio 1.
Sia $X_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid tx^2 - x^4 - y^2 + z^2 = 1\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

(a) Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il luogo X_t è non vuoto.

(b) Sia $\mathcal{R} = \{t \in \mathbb{R} \mid X_t$ è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}^3\}$. Determinare $\mathcal{R}$.

(c) Per ogni $t \notin \mathcal{R}$ e per ogni punto singolare p di X_t, determinare il cono tangente a X_t in p.

(d) Dire se i luoghi X_0 e X_4 sono connessi.

Esercizio 2.
Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, considerare l'applicazione $\sigma : \mathbb{R}_u \times (-\varepsilon, \varepsilon)_v \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$\sigma(u, v) = ([2 - v \sin(u/2)] \sin(u), [2 - v \sin(u/2)] \cos(u), v \cos(u/2)) \ .$$

(a) Calcolare la curvatura gaussiana della superficie S in $\mathbb{R}^3$ determinata dall'immagine dell'applicazione σ.

(b) Determinare il tipo topologico di S.

Esercizio 3.
Sia $n \geq 1$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e giustificare la propria risposta.

(a) La varietà $\mathrm{U}(n)$ è orientabile.

(b) Sia $\Phi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^2$ liscia e sommersiva e sia $q \in \mathbb{R}^2$ nell'immagine di Φ.
Allora $\Phi^{-1}(q)$ è orientabile.

Esercizio 4.
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie liscia e orientata, parametrizzata da $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Per ogni $u \in U$, siano K_u la curvatura gaussiana, H_u la curvatura media e ν_u il vettore normale unitario a S in $p = \sigma(u)$.
Per ogni $a \geq 0$, definiamo $\sigma_a(u) := \sigma(u) + a\nu_u : U \to \mathbb{R}^3$.

- Determinare $a_{max} \in [0, +\infty]$ tale che σ_a è un'immersione (*immersion*) in $\mathbb{R}^3$ per ogni $0 \leq a < a_{max}$.